SUMÁRIO

ABERTURA **5**
APRESENTAÇÃO 5
OBJETIVO E CONTEÚDO 6
BIBLIOGRAFIA 7
PROFESSOR-AUTOR 7

MÓDULO 1 – CONCEITOS BÁSICOS **9**
APRESENTAÇÃO 9
ESTRUTURA DO MÓDULO 1 9
UNIDADE 1 – PRINCÍPIO BÁSICO **9**
1.1 PRINCÍPIO BÁSICO 9
1.2 CONCEITUAÇÃO 9
1.2.1 EXEMPLO 1 10
1.2.2 EXEMPLO 2 10
1.3 POSSIBILIDADES DA MATEMÁTICA FINANCEIRA 11
1.4 SÍNTESE 11
UNIDADE 2 – VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO **11**
2.1 CONCEITUAÇÃO 11
2.2 VALOR PRESENTE E VALOR FUTURO 11
2.2.1 OPERAÇÃO FINANCEIRA 12
2.2.2 OPERAÇÕES FINANCEIRAS E PRAZOS 13
2.3 JUROS E TAXAS DE JUROS 14
2.3.1 UNIDADE DE MEDIDA 14
2.3.1.1 PADRONIZAÇÃO 15
2.4 JUROS SIMPLES 15
2.4.1 EXEMPLO 16
2.5 JUROS COMPOSTOS 16
2.5.1 EXEMPLO 1 17
2.5.2 EVOLUÇÃO DO VALOR COM CAPITALIZAÇÃO SIMPLES E CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA 17
2.6 SÍNTESE 18
2.7 AUTOAVALIAÇÃO 18
2.8 JOGO 18

MÓDULO 2 – JUROS SIMPLES E COMPOSTOS **19**
APRESENTAÇÃO 19
ESTRUTURA DO MÓDULO 2 19
UNIDADE 1 – JUROS SIMPLES **19**
1.1 CONCEITUAÇÃO 19
1.1.1 EXEMPLO 1 20
1.1.2 EXEMPLO 2 21
1.1.3 EXEMPLO 3 22
1.2 LISTA DE EXERCÍCIOS 23

1.3 SÍNTESE ... 23
UNIDADE 2 – OPERAÇÕES COM JUROS SIMPLES ... 23
2.1 UTILIZAÇÃO DOS JUROS SIMPLES ... 23
2.2 TAXAS DE DESCONTO BANCÁRIO ... 23
2.3 TAXA DE RENTABILIDADE ... 24
2.3.1 TAXA DE DESCONTO *VERSUS* TAXA DE RENTABILIDADE ... 24
2.4 DESCONTOS SIMPLES ... 25
2.4.1 DESCONTO DE DUPLICATAS SIMPLES ... 25
2.4.2 DESCONTO DE PROMISSÓRIAS ... 25
2.4.2.1 FÓRMULA PARA DESCONTO SIMPLES ... 26
2.4.2.1.1 CÁLCULO ... 26
2.4.2.2 FÓRMULA PARA RENTABILIDADE SIMPLES ... 27
2.4.2.3 EXEMPLO 1 ... 27
2.4.2.4 EXEMPLO 2 ... 28
2.4.2.5 EXEMPLO 3 ... 29
2.5 LISTA DE EXERCÍCIOS ... 30
2.6 SÍNTESE ... 30
UNIDADE 3 – JUROS COMPOSTOS ... 30
3.1 CONCEITUAÇÃO ... 30
3.1.1 EXEMPLO 1 ... 31
3.1.2 EXEMPLO 2 ... 33
3.1.3 EXEMPLO 3 ... 35
3.1.4 EXEMPLO 4 ... 36
3.1.5 EXEMPLO 5 ... 38
3.2 LISTA DE EXERCÍCIOS ... 39
3.3 SÍNTESE ... 39
3.4 AUTOAVALIAÇÃO ... 39
3.5 JOGO ... 39

MÓDULO 3 – TAXAS E FLUXOS DE CAIXA EQUIVALENTES ... 41
APRESENTAÇÃO ... 41
ESTRUTURA DO MÓDULO 3 ... 41
UNIDADE 1 – TAXAS EQUIVALENTES, NOMINAIS, EFETIVAS, E PROPORCIONAIS ... 42
1.1 ILUSTRAÇÃO ... 42
1.2 TAXA NOMINAL E TAXA EFETIVA ... 42
1.3 TAXAS EQUIVALENTES ... 43
1.3.1 EQUIVALÊNCIA COM JUROS SIMPLES ... 43
1.3.1.1 GENERALIZAÇÃO ... 44
1.3.2 EXEMPLO 1 ... 44
1.3.3 EXEMPLO 2 ... 45
1.3.3.1 RESOLUÇÃO ... 46
1.3.3.2 CONTINUAÇÃO ... 46
1.4 OPERAÇÕES COM JUROS SIMPLES ... 48
1.5 OPERAÇÕES COM JUROS COMPOSTOS ... 48

1.5.1 APLICAÇÃO 48
1.5.1.1 EXEMPLO 1 49
1.5.1.2 EXEMPLO 2 50
1.5.1.3 EXEMPLO 3 52
1.6 LISTA DE EXERCÍCIOS 53
1.7 SÍNTESE 53
UNIDADE 2 – SÉRIES DE PAGAMENTOS 54
2.1 CONCEITOS 54
2.2 ANUIDADES – PAGAMENTOS IGUAIS 54
2.2.1 RESOLUÇÃO DE QUESTÕES 54
2.3 APRESENTAÇÃO DO EXEMPLO 55
2.3.1 EXEMPLO 1 55
2.3.2 EXEMPLO 2 56
2.3.3 EXEMPLO 3 57
2.3.4 EXEMPLO 4 58
2.3.5 LISTA DE EXERCÍCIOS 58
2.4 PERPETUIDADES 58
2.4.1 EXEMPLOS 59
2.5 RESUMO DAS FÓRMULAS 60
2.6 APRESENTAÇÃO DOS EXERCÍCIOS 60
2.6.1 EXEMPLO 1 60
2.6.2 EXEMPLO 2 60
2.6.3 EXEMPLO 3 61
2.6.4 EXEMPLO 4 61
2.6.5 EXERCÍCIOS 61
2.7 FLUXOS NÃO UNIFORMES 62
2.8 CÁLCULO DE UM VALOR PRESENTE DE UM FLUXO NÃO UNIFORME NA FÓRMULA 62
2.9 CÁLCULO DE UM VALOR PRESENTE DE UM FLUXO NÃO UNIFORME NA CALCULADORA 62
2.10 PAGAMENTOS BALÃO – PAGAMENTOS INTERMEDIÁRIOS 63
2.10.1 EXEMPLO 63
2.10.2 EXEMPLO 2 63
2.10.3 EXEMPLO 3 64
2.10.4 LISTA DE EXERCÍCIOS 65
2.11 SÍNTESE 65
UNIDADE 3 – SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃOE EQUIVALÊNCIAS DE FLUXOS DE CAIXA 65
3.1 AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMO 65
3.2 DESAFIO 67
3.2.1 JOGO 67
3.3 ESTUDO DE CASO 67
3.3.1 PAGAMENTO NO FINAL 67
3.3.2 PAGAMENTO PERIÓDICO 69
3.3.3 SISTEMA PRICE 71
3.3.4 SISTEMA SAC 75
3.3.5 SISTEMA SAM 77

3.4 EXEMPLO 1 78
3.5 EXEMPLO 2 79
3.6 LISTA DE EXERCÍCIOS 82
3.7 SÍNTESE 83
3.8 AUTOAVALIAÇÃO 83
3.9 JOGO 83

MÓDULO 4 – INTRODUÇÃO À ANALISE DE PROJETOS 85
APRESENTAÇÃO 85
ESTRTURA DO MÓDULO 4 85
UNIDADE 1 – VPL E TIR 85
1.1 ILUSTRAÇÃO 85
1.2 VPL E TIR 85
1.2.1 VPL 85
1.2.2 TIR 86
1.3 TAXA MÍNIMA DE ATRATIVIDADE 87
1.3.1 VALOR PRESENTE DE UM PROJETO 88
1.3.2 FÓRMULA DO VPL 88
1.4 CÁLCULO DA TIR 89
1.5 CRITÉRIOS PARA O USO DA TIR 89
1.5.1 EXEMPLO 1 90
1.5.2 EXEMPLO 2 90
1.5.3 EXEMPLO 3 90
1.5.4 EXEMPLO 4 93
1.5.5 EXEMPLO 5 93
1.5.6 EXEMPLO 6 95
1.5.7 EXEMPLO 7 95
1.5.8 EXEMPLO 8 96
1.5.9 EXEMPLO 9 98
1.5.10 EXEMPLO 10 98
1.5.11 EXEMPLO 11 99
1.6 CONCLUSÃO 99
1.7 LISTA DE EXERCÍCIOS 100
1.8 SÍNTESE 100
1.9 AUTOAVALIAÇÃO 100
1.10 JOGO 100

MÓDULO 5 – ENCERRAMENTO 101
APRESENTAÇÃO 101

ABERTURA

Apresentação

A filosofia nasceu quando a humanidade tentou começar a entender o mundo, não pela simples aceitação das tradições e revelações ou dos dogmas religiosos, mas pelo uso puro e simples da razão. Foi a partir da filosofia que nasceram a matemática, a química, a física, a medicina, enfim, todas as ciências.

O filósofo racionalista René Descartes (1596–1650) – autor de algumas frases conhecidas tais como *Penso logo existo* e O bom senso é a coisa mais bem distribuída do mundo, *pois cada um se acha bem provido dele* –, no tempo em que a matemática era ainda um ramo da filosofia, afirmava que *A ciência moderna esta construída da seguinte forma*...

> *As demonstrações matemáticas partem de um número muito pequeno de premissas de extrema simplicidade, uma simplicidade tão básica e óbvia que é impossível duvidar delas. As demonstrações a seguir procedem dedutivamente por um raciocínio lógico, um de cada vez, passo a passo, de tal forma que é irrefutável e normalmente muito simples e de novo indubitável uma nova conclusão. E a seguir o que fascina todo aquele que cai sob o encanto da matemática é descobrir que, movendo-se apenas por passos lógicos, cada um deles extremamente simples e óbvio, e por premissas, todas elas também simples e óbvias, se começa a chegar a conclusões que não são de modo algum simples, muito menos óbvias. Mundos inteiros de descobertas imprevistas, e até mesmo contra intuitivas, começam a abrir-se diante de nós, muitas delas espantosas, muitas de grande utilidade prática e todas inegavelmente verdadeiras.*

Foi seguindo essa afirmativa que foi desenhada esta disciplina.

Na **Matemática Financeira**, trataremos dos cálculos que nos permitem manipular valores financeiros – dinheiro – ao longo do tempo, com o objetivo de fazer comparações consistentes entre diferentes alternativas de investimentos.

Na prática, trabalharemos com o cálculo do valor de prestações e do saldo devedor de financiamentos, de modo a identificarmos o melhor financiamento e se um determinado investimento vai dar lucro ou prejuízo.

Tentaremos ainda determinar a viabilidade econômica de um projeto de investimento, de modo a sabermos quanto tempo esse projeto demora para dar lucro. Para tal, discutiremos formas para definir a rentabilidade de um investimento, de modo a selecionar o melhor investimento.

Finalmente, calcularemos quanto precisamos ter hoje para cobrir gastos futuros e quanto deveremos cobrar de juros para termos lucro. Determinaremos ainda a taxa de juros real e a efetiva.

Ao optar por fazer a disciplina **Matemática Financeira**, você optou também por participar de um novo método de ensino – o ensino a distância. Dessa forma, você terá bastante flexibilidade para realizar as atividades nele previstas. Embora você possa definir o tempo que irá dedicar a este trabalho, ele foi planejado para ser concluído em um prazo determinado. Verifique sempre, no calendário, o tempo de que você dispõe para dar conta das atividades nele propostas. Lá estarão agendadas todas as atividades, em data previamente determinada, ao professor-tutor.

Objetivo e Conteúdo

Na **Matemática Financeira**, objetivamos apresentar o fundamento teórico e a metodologia necessária para efetuar cálculos financeiros. Simultaneamente, faremos um treinamento prático com exercícios, em nível executivo, por meio de exemplos numéricos e de uma série de exercícios – acompanhados de gabaritos e comentários.

Sob esse foco, a **Matemática Financeira** foi estruturada em **cinco módulos**, onde foi inserido o seguinte conteúdo...

Módulo 1 – *Conceitos básicos*

Neste módulo, analisaremos os fundamentos e os princípios que norteiam a Matemática Financeira, bem como suas definições e fórmulas fundamentais.

Módulo 2 – *Juros simples e compostos*

Neste módulo, faremos o acompanhamento das aplicações financeiras disponíveis no mercado, a partir do uso das fórmulas e dos cálculos dos juros com capitalização simples ou composta.

Módulo 3 – *Taxas e fluxos de caixa equivalentes*

Neste módulo, trabalharemos com as taxas efetivas e nominais, identificando a equivalência entre as taxas de juros das transações do mercado, construindo fluxos de caixa, assim como calculando operações de financiamento a partir dos principais sistemas de amortização praticados no mercado.

Módulo 4 – *Introdução à análise de projetos*

Neste módulo, analisaremos dois critérios muito importantes para decidir sobre que investimento fazer – o valor presente líquido e a taxa interna de retorno.

Módulo 5 – *Encerramento*

Neste módulo – além da avaliação desse trabalho –, você encontrará um simulado para avaliar o que aprendeu durante a disciplina, além de algumas divertidas opções para testar seus conhecimentos sobre o conteúdo desenvolvido nos módulos anteriores – caça-palavras, jogo da memória, jogo da caça e jogo do labirinto. Entre neles e bom trabalho!

Bibliografia

MENDONÇA, Luiz Geraldo; BOGGIS, George Joseph; GASPAR, Luiz Alfredo; HERINGER, Marcos Guilherme. *Matemática Financeira*. 11ª ed. Rio de Janeiro: Editora FGV, 2013.

Livro muito didático, utilizado nas turmas dos cursos MBA, de pós-graduação da FGV.

PUCCINI, Abelardo de Lima. *Matemática Financeira*: Objetiva e Aplicada. 6 ª ed. Saraiva, 2012.

Livro reconhecido no mercado, apresenta uma sequência fácil e objetiva dos tópicos relevantes. O enfoque dado no livro privilegia o aspecto prático, com conceitos demonstrados a partir de exemplos enquadrados nos padrões adotados pelas tabelas finaceiras, pela calculadora HP-12 e pela planilha eletrônica Excel.

SAMANEZ, Carlos Patrício. *Matemática Financeira*. 6 ª ed. Pearson. 2010.

O cálculo financeiro e a análise de investimentos são ferramentas essenciais para a tomada de decisões e para a gestão financeira. Um dos méritos desse livro do professor Samanez é desenvolver a habilidade dos leitores em cálculos e investimentos, de modo gradual e efetivo.

Professor-Autor

José Carlos Abreu é Doutor em Finanças pela **PUC-RJ**. Mestre em *Business Administration* pela *Columbia University*, New York. Engenheiro Eletricista pela *Universidade de Brasília*. Foi engenheiro da Hitachi, Japão. Engenheiro projetista da DDH, na *Cobra, Computadores e Sistemas Brasileiros*. Diretor financeiro da *Pacific do Brasil Comércio* e *General Manager* da *Unipac Trading Company*, Los Angeles. Consultor do *BCG Consulting Group New York*. Autor do livro *Finanças Corporativas*, da série *FGV Management*, é também professor-autor das disciplinas Análise da Viabilidade Financeira e Finanças Empresariais, ambas do programa *FGV Online*. Atua como consultor financeiro de empresas há mais de 20 anos. Atualmente, é Coordenador acadêmico e professor dos cursos de pós-graduação da **FGV**.

MÓDULO 1 – CONCEITOS BÁSICOS

Apresentação

Na **Matemática Financeira**, trataremos dos cálculos que nos permitem manipular valores financeiros – dinheiro – ao longo do tempo, com o objetivo de fazer comparações consistentes entre diferentes alternativas de investimentos.

Na prática, trabalharemos com o cálculo do valor de prestações e do saldo devedor de financiamentos, de modo a identificarmos qual o melhor financiamento e se um determinado investimento vai dar lucro ou prejuízo.

Inserimos, ao final do módulo, uma bateria de exercícios de fixação, para que você possa neles aplicar o conteúdo aqui tratado. Mais ainda... esses exercícios foram organizados por grau crescente de dificuldade.

Lembre-se... na base da tela de cada exercício, disponibilizamos *links*, para que você possa acessar tanto a *calculadora financeira* quanto o gabarito e as explicações para esta questão.

Estrutura do Módulo 1

Este primeiro módulo tem apenas duas unidades: **princípio básico** e **valor do dinheiro no tempo**.

Vamos para a primeira?

UNIDADE 1 – PRINCÍPIO BÁSICO

1.1 Princípio Básico

A Matemática Financeira é uma ferramenta que nos auxilia a tomar decisões financeiras.

> Uma decisão financeira ótima é aquela que visa à maximização da riqueza dos investidores. Podemos determiná-la a partir do valor do dinheiro no tempo...
>
> R$ 1,00 hoje, vale mais do que R$ 1,00 no futuro.

Assim...

1.2 Conceituação

Partindo da premissa de que existem aplicações financeiras disponíveis – poupança, renda fixa, títulos do governo... – podemos hoje aplicar R$ 1,00 e, no futuro, teremos esse R$ 1,00 mais os juros referentes a essa aplicação.

São justamente os juros que remuneram a aplicação de nosso dinheiro ao longo do tempo. Assim, se aplicamos R$ 100,00 a uma taxa de juros de 10% ao mês, ao final de um mês de aplicação, teremos R$ 110,00.

Logo...

R$ 100,00 hoje equivalem a R$ 110,00 daqui a um mês;

R$ 100,00 hoje *não são* a mesma coisa que R$ 100,00 daqui a um mês.

Receber R$ 100,00, hoje, vale mais do que receber R$ 100,00 daqui a um mês.

1.2.1 Exemplo 1

Anunciei uma impressora antiga por R$ 100,00 e recebi duas propostas...

Qual das duas é a melhor proposta?

Considerando que a taxa de juros para aplicações é de 10% a.m., que opção você escolheria?

- *proposta A*: pagamento à vista de R$ 100,00.
- *proposta B*: pagamento de R$ 105,00 daqui a 1 mês.

Ora, se a taxa de juros para aplicações é 10% ao mês, você deve preferir receber os R$ 100,00 à vista – proposta A –, pois poderá aplicá-los e, em um mês, terá R$ 110,00, que valem mais do que os R$ 105,00 da proposta B.

1.2.2 Exemplo 2

Mas se eu tivesse recebido uma terceira proposta...

- *proposta C*: pagamento de R$ 120,00 daqui a 1 mês.

... faria melhor negócio aceitando a proposta C!

Se a taxa de juros para aplicações é 10% ao mês, você deve preferir receber os R$ 120,00 daqui a um mês – proposta C –, pois, se você aceitar a proposta A – R$ 100,00 hoje – e aplicar o que recebeu, você terá, ao fim de um mês, R$ 110,00, que valem menos do que estaria recebendo pela proposta C.

1.3 Possibilidades da Matemática Financeira

Para encerrar essa breve unidade...

Antes de passarmos para a síntese, vejamos o que a Matemática Financeira nos permite fazer...

- calcular o valor de uma prestação;
- calcular o saldo devedor de um financiamento;
- decidir qual o melhor financiamento dentre vários;
- verificar se um determinado investimento vai dar lucro ou prejuízo;
- verificar se é melhor alugar ou comprar um equipamento;
- saber quanto devemos poupar mensalmente para atingir um determinado objetivo;
- saber o lucro que teremos em uma operação financeira;
- verificar a viabilidade econômica de um projeto de investimento;
- saber quanto tempo um projeto demora para dar lucro;
- saber quanto deveríamos ter hoje para cobrirmos gastos futuros;
- definir quanto devemos cobrar de juros para ter lucro;
- determinar qual é a taxa de juros real e efetiva que estamos pagando/recebendo;
- determinar a rentabilidade de um investimento;
- escolher qual é o melhor investimento dentre vários.

1.4 Síntese

Acesse, no ambiente *on-line*, a síntese desta unidade.

UNIDADE 2 – VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO

2.1 Conceituação

Partimos da premissa de que existem inúmeros investimentos disponíveis – poupança, renda fixa... – que podem ser realizados por qualquer investidor que disponha de capital. Sabemos ainda que todo o capital aplicado, em qualquer investimento, recebe uma remuneração que pode ser maior ou menor, dependendo do tipo de investimento feito.

Todo capital parado e não investido – que não está sendo remunerado – perde o que poderia estar recebendo sob a forma de juros, o que configura uma medida de custo de oportunidade perdido.

Vejamos, a seguir, *valor presente* e *valor futuro*.

2.2 Valor Presente e Valor Futuro

Em princípio, estamos todos no tempo presente. Quando recebemos ou aplicamos algum valor hoje... agora... neste instante... isso significa que este valor é o valor presente*.

**valor presente...*
O Valor Presente é usualmente representado por **VP**. Nas calculadoras financeiras, é comum encontrarmos a sigla **PV** – *Present Value*.

Há ainda autores que preferem se referir ao **VP** como *capital inicial*, *principal* ou, simplesmente, **P**.

Quando vamos receber ou pagar ou aplicar algum valor no futuro no ano que vem, no mês que vem... isso significa que tal valor é um valor futuro*.

**valor futuro...*
O Valor Futuro é usualmente representado por **VF**. Nas calculadoras financeiras, é comum encontrarmos a sigla **FV** – *Future Value*.

Há ainda autores que preferem se referir ao **VF** como *montante* – **S** – ou, simplesmente, **F**.

Como a Matemática Financeira baseia-se, fundamentalmente, em convenções, um valor considerado futuro – **VF** – pode ser também um valor presente – **VP** – em relação a outro valor alocado mais no futuro.

Além disso...

2.2.1 Operação Financeira

Sabemos que, em toda operação financeira*, existem pelo menos dois lados...

- o lado do investidor ou emprestador;
- o lado do tomador.

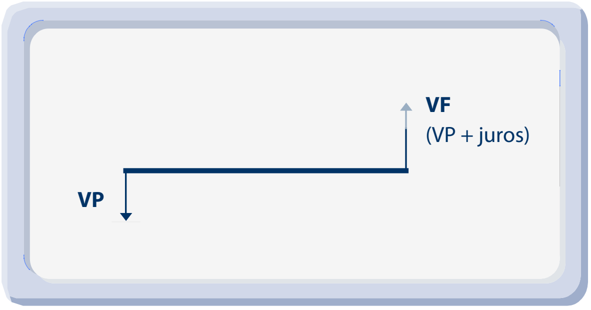
**operação financeira...*
Operação financeira é o nome genérico que o mercado utiliza para referir-se às operações de empréstimos, financiamentos, desconto antecipado de duplicatas, aplicação em fundos de investimentos e outros.

Em resumo, são as transações que efetuamos no dia a dia, sejam de aplicação ou de captação de recursos.

Assim, quando depositamos algum dinheiro na poupança, nós somos o investidor; a instituição do depósito é o tomador, que recebe nosso investimento.

Se depositarmos hoje – saída de caixa – um valor presente, também chamado *valor principal*...

...esperamos receber no futuro – entrada de caixa – um *valor futuro*, que sempre será igual a soma do investimento inicial – valor presente – com os juros dessa aplicação.



VF = VP + JUROS

Essa é a fórmula mais importante deste curso. Vamos rever e utilizar essa fórmula em todos os capítulos.

Manipulando algebricamente a fórmula podemos concluir que...

JUROS = VF – VP

Ou seja, a diferença entre valor futuro e valor presente são os juros da operação.

Exemplo

Você vai à loja comprar um item. Você pode pagar R$ 100,00, à vista, hoje – valor presente –, ou pode pagar R$ 110,00 a prazo, em 30 dias – valor futuro.

Então, podemos dizer que...

O valor presente será **VP** = R$ 100,00
O valor futuro será **VF** = R$ 110,00
Os juros serão **VF – VP** = R$ 10,00

A diferença entre valor à vista e valor a prazo é o juros.

2.2.2 Operações Financeiras e Prazos

Na Matemática Financeira, trabalhamos muito com prazos...

Antes de passarmos para os juros e a taxa de juros, veja essa curiosidade.

Visando à padronização dos prazos, comerciantes medievais adotaram algumas regras simplificadoras dos cálculos, criando o mês e o ano comerciais. Segundo a convenção adotada, o mês comercial tem 30 dias, enquanto o ano, por ser decomposto em exatos 12 meses, tem, portanto,

2.3 Juros e Taxas de Juros

Juro* é o **valor** que se paga ao investidor por sua aplicação – investimento – durante um determinado período de tempo, ou seja, com um prazo determinado.

**juro...*
Os economistas ainda definem juros como sendo a remuneração do uso do fator capital financeiro. O conceito de juros também pode ser entendido como...

- o dinheiro pago pelo uso de dinheiro emprestado, ou seja, custo do capital de terceiros colocado a nossa disposição;
- a remuneração do capital empregado em atividades produtivas ou ainda a remuneração paga pelas instituições financeiras sobre o capital nelas aplicado;
- o aluguel do capital alheio.

E como calculamos esse **valor**?

Para calcularmos os juros, precisamos da taxa de juros* pactuada entre as partes, do valor da operação e do prazo.

**taxa de juros...*
A taxa de juros, como indica o próprio nome, é uma taxa, geralmente expressa em base percentual, por exemplo, 10% ao ano.

Por exemplo, se a taxa de juros é 10% ao ano e o valor da operação é R$ 1.000,00, então os juros relativos a um ano de aplicação serão de R$ 100,00.

2.3.1 Unidade de Medida

As taxas de juros são apresentadas sempre em referência a uma unidade de tempo: ano, semestre, trimestre, mês, dia.

Logo...

12% ao ano = 12% a.a.
10% ao mês = 10% a.a.

Desafio!

Marque a alternativa correta...

Qual é o valor total dos juros que um capital de R$ 10.000,00, aplicado a uma taxa de juros de 8% a.a., proporcionará, ao final de um ano?

- R$ 80,00
- R$ 800,00
- R$ 10.800,00

Acesse, no ambiente *on-line*, a resposta correta.

2.3.1.1 Padronização

Ao efetuarmos cálculos com taxas de juros, devemos **sempre adotar uma única unidade de tempo** para todas as variáveis envolvidas. Se temos taxas de juros em anos e o número de períodos em meses, devemos colocar o tempo em anos, ou então colocar os juros em meses.

Vejamos... Vamos retornar ao problema anterior...

Qual é o valor total dos juros que um capital de R$ 10.000,00, aplicado a uma taxa de juros de 8%a.a., proporcionará, no final de doze meses?

Para calcular esse total, devemos transformar, inicialmente, o prazo de 12 meses em seu equivalente anual – 1 ano. Teremos, então, a taxa de juros e o tempo da aplicação na mesma unidade de tempo, isto é, em anos.

Teremos então...

8% de 10.000,00 = (8 / 100) × 10.000,00 = R$ 800,00

2.4 Juros Simples

No regime de juros simples...

...os juros de cada período são sempre calculados sobre o capital inicial – principal.

...o valor dos juros a serem pagos é definido no início da operação financeira – tomada de empréstimo ou aplicação.

...o valor é calculado, uma única vez, sobre o capital inicial – principal – no início da operação financeira.

Enquanto durar a operação financeira os juros permanecem constantes e não são novamente recalculados, independente se o montante da operação aumentou ou diminuiu ao longo do tempo.

Por essa razão, a aplicação do regime de juros simples é muito limitada e tem sentido apenas a curtíssimo prazo ou se os juros devidos não forem pagos antes do encerramento da operação.

2.4.1 Exemplo

Se você aplicou R$ 100,00, em CDB – aplicação que lhe renderá juros simples com taxa de 10% a.a. –, veja o saldo dessa aplicação ao final de 4 anos...

Ano	Saldo início do ano	Taxa juros	Base para cálculo	Juros do período	Saldo final do ano
1	R$ 100,00	10%	R$ 100,00	R$ 10,00	R$ 110,00 (próx. ano)
2	R$ 110,00	10%	R$ 100,00	R$ 10,00	R$ 120,00 (próx. ano)
3	R$ 120,00	10%	R$ 100,00	R$ 10,00	R$ 130,00 (próx. ano)
4	R$ 130,00	10%	R$ 100,00	R$ 10,00	R$ 140,00 (final)

Aqui, existe uma outra variável a considerar. Esse banco não permite que o investidor retire os juros de cada período.

Assim, apesar de os juros estarem à disposição do banco, eles nunca foram remunerados.

Caso esse banco permitisse que o investidor retirasse os juros – ainda que continuasse a não remunerar os juros remanescentes –, você passaria a ter uma entrada nova de capital por conta da eventual aplicação que pudesse fazer com os juros recebidos em outra instituição financeira. E, neste caso, você estaria recebendo os juros dessa nova aplicação sobre aplicação dos juros.

Seria um caso de juros compostos...

2.5 Juros Compostos

No caso dos juros compostos, os juros de cada período são calculados sempre em função do saldo existente no início de cada respectivo período.

> No regime de juros compostos, o valor dos juros a serem pagos a cada período são calculados sobre o saldo devedor atualizado da operação, a cada período. Por esta razão, a aplicação do regime de juros composto é universal e suas operações e seus cálculos podem ser realizados com o auxílio de calculadoras financeiras.

Se você aplicou R$ 100,00, em CDB – aplicação que lhe renderá juros compostos com taxa de 10% a.a. –, o saldo dessa aplicação ao final de 4 anos seria...

2.5.1 Exemplo 1

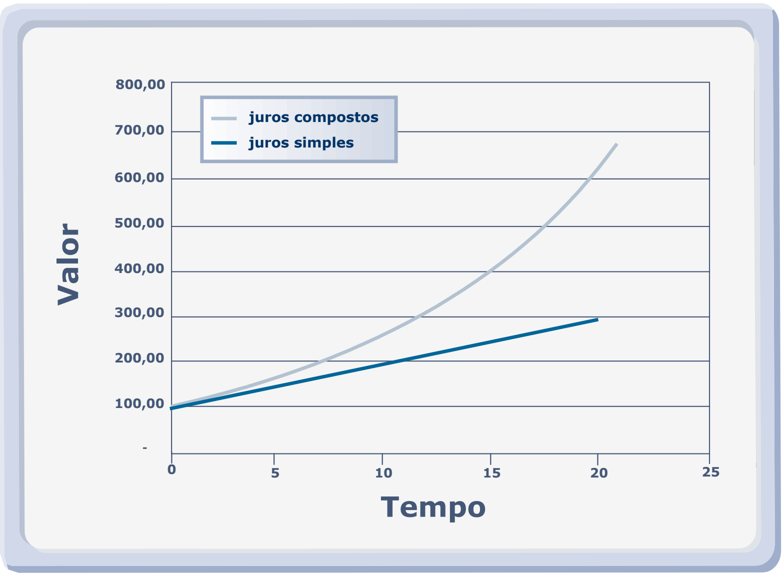
Se você aplicou R$ 100,00, em CDB – aplicação que lhe renderá juros compostos com taxa de 10% a.a. –, veja o saldo dessa aplicação ao final de 4 anos...

Ano	Saldo início do ano	Taxa juros	Base para cálculo	Juros do período	Saldo final do ano
1	R$ 100,00	10%	R$ 100,00	R$ 10,00	R$ 110,00 (próx. ano)
2	R$ 110,00	10%	R$ 110,00	R$ 11,00	R$ 121,00 (próx. ano)
3	R$ 121,00	10%	R$ 121,00	R$ 12,10	R$ 133,10 (próx. ano)
4	R$ 133,10	10%	R$ 133,10	R$ 13,31	R$ 146,41 (final)

Em 4 anos, já podemos notar a diferença entre uma capitalização de juros simles e uma de juros compostos.

2.5.2 Evolução do Valor com Capitalização Simples e Capitalização Composta

Veja um gráfico que mostra essa diferença por um período de 20 anos...



Repare...

Aplicações com juros simples evoluem linearmente...

Quando os juros são compostos, a evolução é exponencial.

2.6 Síntese

Acesse, no ambiente *on-line*, a síntese desta unidade.

2.7 Autoavaliação

Acesse, no ambiente *on-line*, a autoavaliação deste módulo.

2.8 Jogo

Acesse, no ambiente *on-line*, um jogo sobre o conteúdo deste módulo.

MÓDULO 2 – JUROS SIMPLES E COMPOSTOS

Apresentação

Neste módulo, veremos como se dá o acompanhamento das aplicações financeiras disponíveis no mercado, a partir do uso das fórmulas e dos cálculos dos juros com capitalização simples ou composta.

Inserimos, ao final do módulo, uma bateria de exercícios de fixação, para que você possa neles aplicar o conteúdo aqui tratado. Mais ainda... esses exercícios foram organizados por grau crescente de dificuldade.

Lembre-se... na base da tela de cada exercício, disponibilizamos *links*, para que você possa acessar tanto a *calculadora financeira* quanto gabarito e as explicações para esta questão.

Estrutura do Módulo 2

Você já teve uma visão geral sobre os juros simples e compostos. Vejamos isso, agora, de forma mais detalhada.

Este módulo está estruturado em duas unidades: juros simples e juros compostos.

Pronto para começar?

Temos bastante trabalho pela frente!

UNIDADE 1 – JUROS SIMPLES

1.1 Conceituação

Hoje, quando você investe determinado valor presente – **VP**, a uma determinada *taxa de juros* **i**, por um prazo **n**, você espera receber no futuro um *valor futuro* – **VF** – que deve ser igual a seu principal mais os juros.

- **VP** é o valor presente inicial;
- **i** é a taxa de juros (abreviatura que vem do inglês *interest)*;
- **n** é o prazo da aplicação (número de períodos);
- **VF** é o valor futuro.

Os juros simples* são calculados como sendo o produto do valor principal (VP) vezes a taxa de juros vezes o prazo (n).

Juros = VP x **i** x **n**

Como o Valor Futuro = Valor Presente + Juros

$$\mathbf{VF} = \mathbf{VP} + \underbrace{\mathbf{VP} \times \mathbf{i} \times \mathbf{n}}_{\textbf{JUROS}}$$

**Juros com capitalização simples...*

No regime de juros simples, o valor dos juros a serem pagos é definido no início da operação financeira – tomada de empréstimo ou aplicação. O valor do juros é sempre calculado, uma única vez, sobre o capital inicial – principal – no início da operação financeira.

1.1.1 Exemplo 1

Suponha que você tenha ligado para o seu banco, querendo aplicar R$ 100,00, a uma taxa de 10% ao mês, pelo prazo de 1 mês. Quanto você deverá receber de juros?

Pelo enunciado,sei que...

- **VP** = 100
- **i** = 0,1*
- **n** = 1

Aplicando a fórmula...	**Juros = VP** × **i** × **n**
Substituindo os valores e calculando...	**Juros =** 100 × 0,1 × 1
Obtemos...	**Juros =** 10

**0,1...*

Lembre-se de que a taxa de juros normalmente é expressa em base percentual, 10%. Para colocarmos esse valor na fórmula, devemos utilizar a taxa de juros em base decimal, isto é, 0,1.

E com quanto você ficaria ao final da operação?

Aplicando a fórmula...	**VF** = **VP** + Juros
Substituindo os valores e calculando...	**VF** = 100 + 10
Obtemos...	**VF** = 110

Vejamos outro exemplo...

1.1.2 Exemplo 2

Após somar todas as vendas, você verificou que o bazar beneficente realizado com sua amiga rendeu R$ 100,00. Por ela ter um perfil conservador, sugeriu que você aplicasse esse dinheiro a uma taxa de juros simples de 2% ao mês, durante dois anos. Qual seria o valor futuro obtido ao final dessa operação?

Lembre-se de que para efetuarmos os cálculos, a taxa de juros deve estar na mesma unidade de tempo que os períodos de aplicação.

Por exemplo, se você tem uma taxa de juros simples de 10% ao mês, sua aplicação deve estar explicitada em meses.

A partir do enunciado e das conversões que devem ser feitas, temos o seguinte...

- **VP** = 100
- **i** = 0,2*
- **n** = 24**
- **VF** = ?

**0,2...*

Temos de colocar a taxa de juros em base decimal. Assim, 2% equivalem a 0,02.

***24...*

Você deve transformar o tempo expresso em anos para meses, ou seja, você deve demarcar o tempo (2 anos) – duração do investimento – como 24 meses, já que a taxa de juros está expressa em meses.

Aplicando a fórmula...	**VF** = **VP** + **VP** × **i** × **n**
Substituindo os valores	**VF** = 100 + 100 × 0,02 × 24
Calculando...	**VF** = 100 + 48***
Obtemos...	**VF** = 148

****48...*

Acabamos de calcular o valor dos juros da operação.

Lembre-se de que as operações de multiplicação e divisão devem ser feitas antes das operações de soma e subtração.

OBS: Alternativamente, você poderia resolver esse mesmo problema – juros simples – representando a taxa de juros em anos – no lugar de transformar o período da operação de anos para meses. Para fazer isso, bastaria multiplicar a taxa mensal por 12, já que o ano tem 12 meses.

Solução

Inicialmente, você deve transformar a taxa fornecida em meses para anos, de forma a fazê-la concordar com a mesma unidade de tempo do período da aplicação. Fazendo as contas, obtemos a taxa anual como sendo 2% x 12 = 24% ao ano. Não se esqueça de colocar a taxa de juros em base decimal, ou seja, 24% são 0,24 em decimal.

Aplicando a fórmula...	**VF** = **VP** + **VP** × **i** × **n**
Substituindo os valores	**VF** = 100 + 100 × 0,24 × 2
Calculando...	**VF** = 100 + 48
Obtemos...	**VF** = 148

IMPORTANTE:

Somente quando estamos tratando de juros simples, a conversão da taxa de meses para anos pode ser feita dessa maneira.

Vejamos um último exemplo para que você possa então fazer alguns exercícios...

1.1.3 Exemplo 3

Daqui a um ano, você precisará ter R$ 1.200,00. Considerando que você tenha conseguido uma aplicação, cuja a taxa de juros seja de 20% ao ano, no regime de juros simples, quanto você precisa aplicar hoje?

Pelo enunciado, sei que...

- **VF** = 1.200;
- **n** = 1;
- **i** = 0,2*;
- **VP** = ?

**0,2...*
Lembre-se de que a taxa de juros normalmente é expressa em base percentual, 20%. Para colocarmos esse valor na fórmula, devemos utilizar a taxa de juros em base decimal, isto é, 0,2.

Aplicando a fórmula...	**VF** = **VP** + **VP** × **i** × **n**
Substituindo os valores	1.200 = **VP** + **VP** × 0,2 × 1
Calculando...	1.200 = **VP** + 0,2 **VP**
Substituindo...	1.200 = 1,2 **VP**
Trocando de lado...	**1,2 VP** = 1.200
Dividindo ambos os lados por 1, 2...	**VP** = 1.200 / 1,2
Obtemos...	**VP** = 1.000

1.2 Lista de Exercícios

Acesse, no ambiente *on-line*, a lista de exercícios sobre o conteúdo desta unidade.

1.3 Síntese

Acesse, no ambiente *on-line*, a síntese desta unidade.

UNIDADE 2 – OPERAÇÕES COM JUROS SIMPLES

2.1 Utilização dos Juros Simples

Na unidade anterior, você viu como são calculados os juros simples...

Mas, na prática, em que momentos eles costumam ser usados?

2.2 Taxas de Desconto Bancário

As taxas de desconto bancário, na maioria das vezes, são sempre expressas em termos de juros, com capitalização simples, salvo indicação em contrário dos bancos ou dos exercícios que iremos fazer.

Os juros que ocorrem nos prazos comerciais são chamados de *juros comerciais*.

Juros comerciais?

Sim... Essas operações não costumam considerar os juros exatos*...

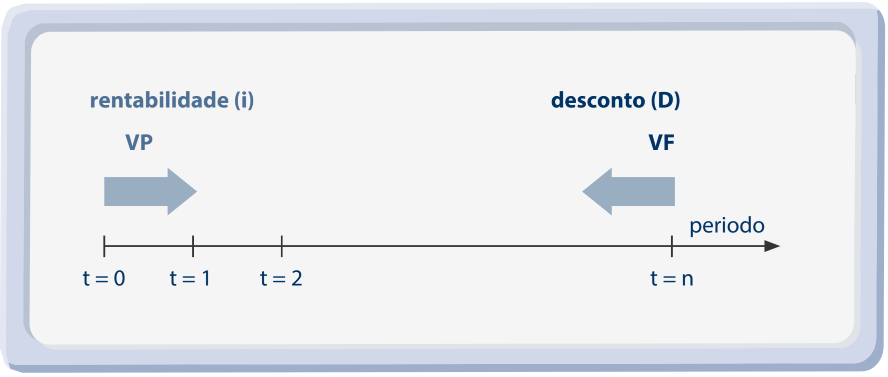
> **juros exatos...*
> *Juros exatos* são os que levam em consideração os dias, os meses e os anos civis.

Assim como existem as taxas de desconto, existem as taxas de rentabilidade...

2.3 Taxa de Rentabilidade

A taxa de rentabilidade **i** é aplicada sobre o valor presente, durante **n** períodos, para produzir o valor futuro. Por outro lado, a taxa de desconto **D** é aplicada sobre o valor futuro, durante **n** períodos, para obtermos o valor presente.

Veja esse esquema...



2.3.1 Taxa de Desconto *versus* Taxa de Rentabilidade

Daí, concluimos que...

> ...quando falamos em ir ao banco para aplicar, hoje, um valor de R$ 100,00, a uma taxa de 10% de juros simples ao ano, para obtermos um valor futuro de R$ 110,00 daqui a 1 ano, estamos falando em taxa de rentabilidade.

Assim...

10% de 100,00 são 10,00, pois a **rentabilidade** é calculada sobre **VP**.

Quando falamos em ir ao banco para realizar uma operação de desconto de um título – duplicatas, por exemplo –, com valor futuro de R$ 110,00 daqui a 1 ano, a uma taxa de 10% de juros simples ao ano, para obter, hoje, o valor de R$ 99,00, estamos falando em taxa de desconto.

Assim...

10% de 110,00 são 11,00, pois o **desconto** é calculado sobre **VF**.

2.4 Descontos Simples

O conceito de taxas de desconto bancário normalmente é utilizado nas operações bancárias de...

- descontos de duplicatas;
- descontos de promissórias.

2.4.1 Desconto de Duplicatas Simples

Quando uma empresa vende uma mercadoria, ela emite uma nota fiscal. De acordo com a lei, essa nota fiscal tem de ter algumas vias* – cópias eletrônicas ou de papel...

Caso essa determinada empresa necessite de dinheiro, os bancos podem adiantar-lhe os valores que ela tem a receber de seus compradores. Na verdade, o que o banco faz é adiantar os pagamentos que ela tem a receber dos clientes na data estabelecida para esses pagamentos.

Denominamos esse processo de desconto de duplicata. Obviamente, o banco cobra uma taxa por esse adiantamento. Ele cobra esse valor adiantado, liberando para a empresa – vendedora da mercadoria, que está descontando a duplicata – um valor menor[2] do que o valor do pagamento a ser feito no futuro pelo comprador da mercadoria.

[1]*vias...*

- uma via acompanha a mercadoria vendida e fica com o comprador;
- a segunda via permanece com o vendedor e é encaminhada para a contabilidade da empresa que vendeu a mercadoria;
- uma terceira via deve permanecer fixada ao talão de notas fiscais;
- dependendo da legislação em vigor, podem ser exigidas ainda outras vias.

[2]*valor menor...*

A diferença entre o valor liberado hoje e o valor a receber no futuro são os juros da operação de desconto de duplicatas.

Esse é o retorno que o banco obtém por adiantar – emprestar – recursos a quem dele está necessitando agora.

Veja, no ambiente *on-line*, um caso de desconto de duplicatas.

2.4.2 Desconto de Promissórias

O conceito de desconto de promissórias é o mesmo do de desconto de duplicatas.

Uma **promissória** é um **instrumento de confissão de dívida**.

O emitente da promissória é aquele que a assina, reconhecendo que deve e que vai pagar determinado valor, em data fixada neste mesmo documento.

Vimos, até aqui, que o conceito de desconto é diferente do de rentabilidade...

Será que existe, então, alguma fórmula específica para calcularmos o desconto?

2.4.2.1 Fórmula para Desconto Simples

Vamos resolver um problema bem simples partindo da fórmula que já conhecemos...

Você aplicou R$ 100,00 a uma taxa de 10% ao mês, por 1 mês. Qual deverá ser o valor futuro que você vai receber ao final da aplicação?

Aplicando a fórmula...	**Valor futuro** = **Valor presente** + **Juros**
Desdobrando-a em...	**VF** = **VP** + (**VP** × **i** × **n**)
Substituindo valores...	**VF** = 100 + (100 × 0,1 × 1)
Calculando...	**VF** = 100 + 10
Obtemos...	**VF** = 110

Vamos, agora, analisar a lógica dessa fórmula...

Valor futuro = **Valor presente** + **Juros**
Juros = **VP** × **i** × **n**
VF = **VP** + **(VP** × **i** × **n)**

2.4.2.1.1 Cálculo

Juros = VP × i × n

Como os juros para desconto de títulos são calculados sobre o valor futuro, devemos registrar...

Juros *(desconto)* **= VF × i × n**

E como o valor que vamos receber hoje – **VP** – é igual ao valor futuro (**VF**) menos os juros descontados, devemos registrar...

Valor Presente = VF – Juros

Substituindo uma fórmula por outra para chegarmos à fórmula do desconto simples, teremos...

$$VP = VF - VF \times i \times n$$

Colocando **VF** em evidência...

$$VP = VF\ (1 - i \times n) \rightarrow \textbf{fómula do desconto}$$

2.4.2.2 Fórmula para Rentabilidade Simples

Nossa primeira fórmula de juros simples já é uma fórmula baseada no conceito de rentabilidade.

$VF = VP + VP \times i \times n$ → Colocando **VP** em evidência na fórmula de juros simples...

De qualquer maneira, colocando **VP** em evidência, ficamos com uma fórmula visualmente semelhante à do desconto...

$$VF = VP\ (1 + i \times n) \rightarrow \textbf{fómula da rentabilidade}$$

Fórmulas já utilizadas

Juros simples...

$$Juros = VP \times i \times n$$

$$VF = VP + VP \times i \times n$$

Fórmula do desconto bancário (desconto simples)...

$$VP = VF\ (1 - i \times n)$$

Fórmula da rentabilidade...

$$VF = VP\ (1 + i \times n)$$

2.4.2.3 Exemplo 1

Você vendeu hoje uma mercadoria a um cliente por R$ 10.000,00, com pagamento acertado para daqui a 2 meses – 60 dias. Porém, ainda hoje, antes de partir para uma viagem ao Japão, você precisa de dinheiro para fechar a folha de pagamentos de sua empresa. Você decide ir ao *Banco Forte* e descontar a duplicata relativa a essa venda.

Suponha que o gerente do *Banco Forte* lhe informe que a taxa de desconto está fixada em 3% ao mês, a juros simples. Quanto você vai receber, se descontar essa duplicata?

E qual é a taxa de rentabilidade do banco nessa operação?

Pelo enunciado, sei que...

- tenho de usar a fórmula de desconto (**n** = 2 **i** = 0,03*);
- o valor que tenho a receber no futuro é 10.000,00 (**VF** = 10.000).

> **0,03...*
> Temos de colocar a taxa de juros em base decimal. Assim, 3% equivalem a 0,03.

Aplicando a fórmula...	**VP** = **VF** (1 – **i** × **n)**
Substituindo valores...	**VP** = 10.000 (1 – 0,03 × 2)
Calculando...	**VP** = 10.000 (0,94)
Obtemos...	**VP** = 9.400

O valor a receber hoje é de R$ 9.400,00.

Vejamos...

2.4.2.4 Exemplo 2

Você vendeu hoje uma mercadoria a um cliente por R$ 10.000,00, com pagamento acertado para daqui a 2 meses – 60 dias. Porém, ainda hoje, antes de partir para uma viagem ao Japão, você precisa de dinheiro para fechar a folha de pagamentos de sua empresa. Você decide ir ao *Banco Forte* e descontar a duplicata relativa a essa venda.

Se você vai receber hoje R$ 9.400,00 por essa operação, **qual a taxa de rentabilidade do** ***Banco Forte***?

Agora temos de usar a fórmula da rentabilidade...

- **VF** = 10.000;
- **VP** = 9.400;
- **n** = 2;
- **i** = ?

Aplicando a fórmula da rentabilidade...	**VF = VP** (1 + **i** × **n)**
Substituindo valores...	10.000 = 9.400 (1 + **i** × 2)
Calculando...	10.000 = 9.400 + 18.800 **i**
Invertendo ambos os termos...	9.400 + 18.800 **i** = 10.000
Passando 9.400 para o outro lado...	18.800 **i** = 10.000 – 9.400
Passando 18.800 para o outro lado...	**i** = (10.000 – 9.400) / 18.800
Obtemos...	**i** = 0,03191

A taxa de rentabilidade do banco *Forte*, a juros simples, é de 3,19% ao mês.

Por fim...

2.4.2.5 Exemplo 3

Um banco comercial realiza operações de desconto de notas promissórias de acordo com os seguintes critérios, a juros simples...

- o prazo da operação é de 3 meses;
- a taxa cobrada pelo banco é de 2% ao mês, ou seja, de 6% ao trimestre;
- os juros são pagos antecipadamente.

Assim, se o cliente desejar realizar uma operação de R$ 100.000,00, deverá assinar uma nota promissória nesse valor com vencimento para 3 meses. Os dados dessa operação podem, então, ser assim resumidos...

- valor liberado hoje pelo banco: R$ 94.000,00*;
- prazo **n** da operação: 3 meses;
- valor a ser pago no final do 3º mês: R$ 100.000,00;
- taxa de desconto de 2%** ao mês, com juros simples.

**R$ 94.000,00...*

Como os juros da operação serão de 6% de R$ 100.000,00, isto é, R$ 6.000,00, o valor líquido recebido pelo cliente, na data da operação será de R$ 94.000,00, uma vez que os juros são pagos antecipadamente.

***2%...*

Em referência à taxa de 2,00% a.m., podemos destacar...

- ela é conhecida como taxa de desconto bancário, pois, ao ser aplicada sobre o montante de R$ 100.000,00, determinará um desconto mensal de R$ 2.000,00. Esses descontos mensais de R$ 2.000,00, por sua vez, ao serem acumulados por 3 meses, proporcionarão um desconto total de R$ 6.000,00 e, com isso, transformarão o montante – **VF** – de R$ 100.000,00 em R$ 94.000,00;
- essa taxa é sempre aplicada sobre o montante pelo número de períodos que for estabelecido.

Qual é a taxa de rentabilidade, isto é, qual é a taxa necessária para que R$ 94.000,00, aplicados com juros simples ao mês, tenham, em 3 meses, um valor futuro de R$ 100.000,00?

Utilizando i como a taxa de juros de rentabilidade ao mês...	94.000 × **i** × 3 = 6.000
Calculando i...	**i** = 0,02128, ou seja, **i** = 2,128%*** a.m.

****2,128%...*

Em referência à taxa de 2,128% a.m., podemos destacar...

- ela corresponde à taxa i da expressão genérica do regime de juros simples;
- ela é conhecida como taxa de rentabilidade, pois, ao ser aplicada sobre o principal de R$ 94.000,00, determinará uma rentabilidade mensal de R$ 2.000,00 sobre esse valor. Esses juros mensais de R$ 2.000,00, ao serem acumulados por três meses, proporcionarão uma rentabilidade total de R$ 6.000,00 e, com isso, transformarão o principal de R$ 94.000,00 no montante de R$ 100.000,00;
- essa taxa é sempre aplicada ao principal pelo número de

2.5 Lista de Exercícios

Acesse, no ambiente *on-line*, a lista de exercícios sobre o conteúdo desta unidade.

2.6 Síntese

Acesse, no ambiente *on-line*, a síntese desta unidade.

UNIDADE 3 – JUROS COMPOSTOS

3.1 Conceituação

O conceito de juros que vimos até agora (Juros = **VF** – **VP**) não muda, a mudança se dá na fórmula que relaciona as variáveis **VF**, **VP**, **i** e **n**...Veja...

Conforme vimos anteriormente*, os juros correspondem à diferença entre o valor futuro e o valor presente de um investimento. Logo...

Juros = VF – VP

A fórmula que relaciona valor presente **VP**, taxa de juros **i**, prazo **n** e valor futuro **VF**, quando tratamos de capitalização composta, é...

- **VP** é o valor presente inicial;
- **i** é a taxa de juros;
- **n** é o prazo da aplicação;
- **VF** é o valor futuro.

$$VF = VP\,(1 + i)^n$$

anteriormente...

Vimos que, quando investimos, hoje, determinado valor presente – também chamado de *principal* –, a uma determinada *taxa de juros*, por um prazo, esperamos receber no futuro um valor futuro, que deve ser igual a seu principal mais os juros.

Ou seja: **VF** = **VP** + Juros Expresso de outra forma... Juros = **VF** – **VP**

3.1.1 Exemplo 1

Imagine que você tenha depositado, hoje, R$ 1.000,00, a serem pagos com juros de 10% ao ano, capitalizados anualmente de forma composta, para formar uma poupança para seu filho.

Quanto ele terá se resgatar o dinheiro daqui a 1 ano?

Do enunciado, tiramos que...

- **VP** = 1.000;
- **n** = 1;
- **i** = 0,1;
- **VF** = ?

Podemos resolver esse problema de 4 maneiras, utilizando...

O conceito geral...

Valor dos juros por ano...	**Valor do principal × Taxa de juros**
Valor dos juros ao final do ano 1...	1.000 × 0,1 = 100
Valor do principal...	1.000
VF = Juros + Valor do principal...	100 + 1.000 = 1.100

A fómula...

Aplicando a fórmula (juros compostos)...	$\mathbf{VF = VP\ (1 + i)^n}$
Substituindo os valores...	**VF** = $1.000\ (1 + 0{,}1)^1$
Calculando...	**VF** = 1.000 (1,1)
Obtemos...	**VF** = 1.100

A HP-12C*...

Teclando 1.000 e, em seguida, o botão **PV** (valor presente).
Digitando 10** e, em seguida, o botão **i** (taxa de juros de 10% ao ano).
Digitando 1 e, em seguida, o botão **n** (prazo do empréstimo em anos).
Digitando 0*** e, em seguida, o botão **PMT** (valor dos pagamentos ou das retiradas periódicas – *periodic payment*).

Teclando, então, o botão **FV**, a calculadora apresentará no visor: **– 1.100,00******.

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação dessa operação.

**HP-12C...*
Optamos por utilizar, neste curso, a calculadora financeira HP-12C. É claro que você pode trabalhar com outra calculadora financeira, mas, neste caso, preste bastante atenção aos botões de sua calculadora... Além de serem visualmente diferentes, eles podem realizar outras funções que não as da calculadora que vamos utilizar nos exemplos deste curso.

A grande maioria das calculadoras apresenta as seguintes teclas com abreviações em inglês...

PV = *Present Value*, em português é **VP**, valor presente;
FV = *Future Value*, em português é **VF**, valor futuro;
n = *Number of Periods*, em português é **n**, número de períodos;
i = *Interest Rate*, em português é **i**, taxa de juros;
PMT = *Payments*, em português é **PGTO**, valor de pagamentos / recebimentos intermediários / prestações.

Para que usar a calculadora financeira?
Para poupar tempo e trabalho repetitivo. Por exemplo, considere um conjunto de 10 pagamentos sobre os quais incida cobrança de juros. Para calcular o total dos juros, você deve calcular os juros de cada pagamento individualmente para, então, somar e obter o total. Com uma calculadora financeira, basta entrar com os valores dos pagamentos e fornecer a taxa de juros, que a máquina calculará todos os juros, apresentando-lhe o resultado final já consolidado.

***10...*
Na calculadora financeira, devemos digitar o valor da taxa de juros em base percentual.

****0...*
Quando não existirem os pagamentos intermediários, isto é, pagamentos ao longo do tempo, teremos apenas **VP** e **VF**, pois **PMT** será zero.

É bom lembrar que essa operação na calculadora financeira só vai funcionar se você digitar os valores de 4 das 5 variáveis (**FV**, **PV**, **PMT**, **n** e **i**) para pedir a quinta...

Preciso colocar zero na calculadora, mesmo quando o valor for zero?

As calculadoras têm memória. Mesmo quando você desliga e liga a máquina, os valores que estavam em determinadas posições da memória permanecem. Suponha que você tenha acabado de resolver um problema financeiro em que o valor do **PMT** foi 150. Suponha agora que você decida iniciar a resolução de um novo problema em que o **PMT** seja zero. Se você não colocar explicitamente **PMT** = 0 na máquina, a memória continuará a registrar **PMT** com o valor 150. Então, se você tentar resolver esse problema sem indicar **PMT** = 0, obterá um resultado errado. **PMT** com o valor 150.

*****–1.100,00...*
A calculadora apresentará no visor –1.100,00. O sinal do **FV** é negativo porque ele é sempre o oposto do sinal do valor presente.

O sinal do valor em **VF** será sempre diferente do sinal do valor em **VP**, sempre que o **PMT** for igual a zero, posto que, para a calculadora, um valor é recebimento e outro pagamento (ou vice-versa).

O excel...

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação no excel.

Vejamos...

3.1.2 Exemplo 2

Imagine que você tenha depositado, hoje, R$ 1.000,00, a serem pagos com juros de 10% ao ano, capitalizados anualmente de forma composta, para formar uma poupança para seu filho.

Quanto ele terá, se resgatar o dinheiro daqui a 2 anos?

Do enunciado, tiramos que...

- **VP** = 1.000;
- **n** = 2;
- **i** = 0,1;
- **VF** = ?

Novamente utilizando...

O conceito geral...

Aproveitando os cálculos que já havíamos feito, no final do primeiro ano, André já tinha R$ 1.100,00.

Valor dos juros por ano 2...	**Saldo anterior × Taxa de juros**
Substituindo os valores...	1.100 × 0,1 = 110

Valor total = valor dos juros do ano 1 + valor dos juros do ano 2 + principal

Substituindo os valores....	100 + 110 + 1.000 = 1.210,00

A fómula...

Aplicando a fórmula (juros compostos)...	$\mathbf{VF} = \mathbf{VP}\,(1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}$
Substituindo os valores...	$\mathbf{VF} = 1.000\,(1 + 0{,}1)^2$
Calculando...	$\mathbf{VF} = 1.000\,(1{,}1)^2$
Calculando...	$\mathbf{VF} = 1.000\,(1{,}21)$
Obtemos...	$\mathbf{VF} = 1.210$

A HP-12C...

Teclando 1.000 e, em seguida, o botão **PV** (valor presente).
Digitando 10 e, em seguida, o botão **i** (taxa de juros de 10% ao ano).
Digitando 2 e, em seguida, o botão **n** (prazo do empréstimo em anos).
Digitando 0* e, em seguida, o botão **PMT** (valor dos pagamentos ou das retiradas periódicas – *periodic payment*).

Teclando, então, o botão **FV**, a calculadora apresentará no visor: **– 1.210,00****.

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação dessa operação.

**0...*
Quando não existirem os pagamentos intermediários, isto é, pagamentos ao longo do tempo, teremos apenas **VP** e **VF**. O **PMT** será igual a zero. De qualquer forma, como dissemos anteriormente, é preciso digitar 0, **PMT**.

***– 1.210,00...*
A calculadora apresentará no visor -1.210,00. O sinal do **FV** é negativo porque ele indica um pagamento – saída de caixa –, ou seja, o oposto do sinal do valor presente, que, por sua vez, é o valor do empréstimo – entrada de caixa

O sinal do valor em **VF** será sempre diferente do sinal do valor em **VP**, posto que, para a calculadora, um valor é recebimento e outro pagamento – ou vice-versa.

O excel...

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação no excel.

Veja, a seguir, um outro caso...

3.1.3 Exemplo 3

Um empresário aplicou R$ 1.000,00, capitalizados de forma composta, por 2 anos – juros anuais –, para montar uma reserva para a primeira festa de final de ano que seria comemorada por todos os funcionários de sua empresa. Passados os dois anos, ele resgatou R$ 1.210,00. Qual foi a taxa de juros que incidiu sobre seu capital inicial?

Do enunciado, tiramos que...

- **VP** = 1.000;
- **n** = 2;
- **VF** = 1.210;
- **i** = ?

Vejamos a resolução desse problema a partir...

da fómula...

Aplicando a fórmula (juros compostos)...	$\mathbf{VF} = \mathbf{VP}\,(1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}$
Substituindo os valores...	$1.210 = 1.000\,(1 + \mathbf{i})^2$
Calculando...	$(1 + \mathbf{i})^2 = 1.210/1.000$
Calculando...	$(1 + \mathbf{i})^2 = 1{,}21$
Calculando a raiz de ambos os lados...	$(1 + \mathbf{i}) = 1{,}1$
	$\mathbf{i} = 1{,}1 - 1$
Obtemos...	$\mathbf{i} = 0{,}1 = 10\%$

da HP-12C...

Teclando 1.000 e o botão **PV** (valor presente).
Digitando –1.210* – ou seja, 1.210 **CHS** – e o botão **FV** – valor futuro.
Digitando 2 e o botão **n** – prazo do empréstimo em anos.
Digitando 0 e o botão **PMT** – valor dos pagamentos.

Teclando, então, o botão **i**, a calculadora apresentará no visor: **10** , que significam **10%**.

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação dessa operação.

**–1.210...*
O sinal do valor em **VF** será sempre diferente do sinal do valor em **VP**, posto que, para a calculadora, um valor é recebimento e outro pagamento – ou vice-versa.

Para digitarmos um valor negativo na HP 12-C, temos de digitar o valor e, em seguida, a tecla CHS, que significa *Change Signal* (em português, mudar de sinal).

Por isso, digitamos 1210, **CHS** e **FV**. (Informamos, assim, que **VF** = –1210).

O excel...

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação no excel.

3.1.4 Exemplo 4

Depois de ter sido cobaia de uma experiência científica, Dr. Albideres perdeu a noção do tempo. Imagine que ele tenha pedido emprestados, hoje, R$ 1.000,00, a serem pagos com juros de 10% ao ano, capitalizados de forma composta. Supondo que, para quitar o que deve, ele deva pagar R$ 1.210,00 na data do vencimento, qual é o prazo desse empréstimo?

Problemas que pedem prazo ou taxa de aplicação envolvem cálculos trabalhosos.

Por isso, geralmente usamos a calculadora. De qualquer maneira, vejamos...

pela fórmula...

Do enunciado, tiramos que...

- **VP** = 1.000;
- **i** = 0,1;
- **VF** = 1.210;
- **n** = ?

Aplicando a fórmula (juros compostos)...	**VF** = **VP** (1 + **i**)^{n}
Substituindo os valores...	1.210 = 1.000 (1 + 0,1)**n**
Calculando...	1,21 = (1,1)**n**
Calculando o logaritmo de ambos os lados...*	**Ln** 1,21 = **Ln** 1,1**n**
Lembrando que...	**Ln Ax** = **X Ln A**
Calculando...	**Ln** 1,21 = **n Ln** 1,1
Onde...	**n** = **Ln** 1,21/**Ln** 1,1
	n = 0,19062036 / 0,09531018
Obtemos...	**n** = 2

**logaritmo...*
Como fazer operações com logaritmos?

Você não precisa usar os logaritmos. Utilizando a calculadora financeira, você pode calcular diretamente o número **n** de período de um investimento. Essas operações com logaritmos foram aqui colocadas apenas a título de ilustração para aqueles que são mais afeitos à matemática e que gostam de chegar à solução de um problema com o uso das fórmulas e com o uso da calculadora. Não é objetivo deste curso o estudo dos logaritmos.

Para quem quiser, a fórmula para cálculo de **n**...
n = **Ln** (**VF** / **VP**) / **Ln** (1 + **i**)
Ou...
n = **log** (**VF** / **VP**) / **log** (1 + **i**)

Ln significa logaritmo neperiano – base e; **log** indica logaritmo decimal – base 10.

pela HP-12C...

Do enunciado, tiramos que...

- **VP** = 1.000;
- **i** = 10;
- **VF** = 1.210;
- **n** = ?

Teclando 1.000 e o botão **PV** (valor presente).
Digitando –1.210 (ou seja, 1.210 **CHS**) e o botão **FV** – valor futuro.
Digitando 10 e o botão **i** (taxa de juros: base percentual).
Digitando 0 e o botão **PMT** (valor dos pagamentos).

Teclando, então, o botão **n**, a calculadora apresentará no visor: **2** , que significam 2 anos.

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação dessa operação.

pelo excel...

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação no excel.

E agora, o último exemplo...

3.1.5 Exemplo 5

Rafaela ficou sem dinheiro para pagar a última mensalidade do curso de biblioteconomia. Passados dois anos, chegou em sua casa uma cobrança com as seguintes especificações...

Total da dívida: R$ 1.210,00*
*Sobre o valor inicial da dívida, foi aplicada uma taxa de juros de 10% ano, capitalizados de forma composta, por dois anos.

Rafaela se perguntou... *Quanto estava devendo há 2 anos?*

Vejamos a resolução desse problema a partir...

da fórmula...

Devemos, aqui, calcular o valor inicial da dívida... **VP**

- **VF** = 1.210;
- **i** = 0,1;
- **n** = 2;
- **VP** = ?

Aplicando a fórmula (juros compostos)...	$\mathbf{VF} = \mathbf{VP}\ (1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}$
Substituindo os valores...	$1.210 = \mathbf{VP}\ (1 + 0,1)^2$
Calculando...	$\mathbf{VP} = 1.210 / (1,1)^2$
Obtemos...	$\mathbf{VP} = 1.000$

da HP-12C...

Do enunciado, tiramos que...

- **VF** = 1.210;
- **i** = 10;
- **n** = 2;
- **VP** = ?

Digitando –1.210 (ou seja, 1.210 **CHS**) e o botão **FV** (valor futuro).
Digitando 10 e o botão **i** (taxa de juros: base percentual).
Teclando 2 e o botão **n** (prazo em anos).
Digitando 0 e o botão **PMT** (valor dos pagamentos**)**.

Teclando, então, o botão **PV**, a calculadora apresentará no visor: 1.000.

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação dessa operação.

do excel...

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação no excel.

3.2 Lista de Exercícios

Acesse, no ambiente *on-line*, a lista de exercícios sobre o conteúdo desta unidade.

3.3 Síntese

Acesse, no ambiente *on-line*, a síntese desta unidade.

3.4 Autoavaliação

Acesse, no ambiente *on-line*, a autoavaliação deste módulo.

3.5 Jogo

Acesse, no ambiente *on-line*, um jogo sobre o conteúdo deste módulo.

MÓDULO 3 – TAXAS E FLUXOS DE CAIXA EQUIVALENTES

Apresentação

Neste módulo, trabalharemos com as taxas efetivas e nominais, identificando a equivalência entre as taxas de juros das transações do mercado, construindo fluxos de caixa, assim como calculando operações de financiamento a partir dos principais sistemas de amortização praticados no mercado.

Inserimos, ao final do módulo, uma bateria de exercícios de fixação, para que você possa neles aplicar o conteúdo aqui tratado. Mais ainda... esses exercícios foram organizados por grau crescente de dificuldade.

Lembre-se... na base da tela de cada exercício, disponibilizamos *links*, para que você possa acessar tanto a *calculadora financeira* quanto gabarito e as explicações para esta questão.

Estrutura do Módulo 3

Você já deve ter ouvido falar em sistema PRICE, em sistemas de amortizações constantes etc., né?

Neste módulo, trabalharemos com os sistemas de amortização.

Antes, porém, trabalharemos com o cálculo das taxas de juros equivalentes e sua conversão a partir de taxas nominais e taxas efetivas.

Este módulo está estruturado em duas unidades: taxas equivalentes, nominais, efetivas e proporcionais, e sistemas de amortização e equivalência de fluxos de caixa.

Pronto para começar?

UNIDADE 1 – TAXAS EQUIVALENTES, NOMINAIS, EFETIVAS, E PROPORCIONAIS

1.1 Ilustração

1.2 Taxa nominal e Taxa Efetiva

12% aa capitalizados mensalmente

Nessa manchete, o jornal diz que o banco está trabalhando com uma taxa nominal...

A taxa nominal[1] é bastante utilizada no mercado, entretanto, seu valor nunca é usado nos cálculos, por não representar uma taxa efetiva[2].

[1]*taxa nominal...*
É aquela em que a unidade de referência de tempo não coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização*. A taxa nominal é quase sempre fornecida em termos anuais, enquanto os períodos de capitalização podem ser semestrais, trimestrais ou mensais.

**períodos de capitalização...*
É o período no qual os juros de uma aplicação são creditados – liberados – para o investidor e cobrados do tomador do empréstimo.

Nesse sentido, capitalização mensal significa que os juros são pagos – creditados / cobrados – mensalmente. Logo, a capitalização diária significa que os juros são pagos – creditados – diariamente.

[2]*taxa efetiva...*
É aquela em que a unidade de referência de tempo coincide com as unidades de tempo dos períodos de capitalização.

Assim...

- 3% ao mês, capitalizados mensalmente;
- 4% ao trimestre, capitalizados trimestralmente;
- 6% ao semestre, capitalizados semestralmente;
- 10% ao ano, capitalizados anualmente.

O que realmente interessa é a taxa efetiva embutida na taxa nominal, pois é ela que será efetivamente aplicada em cada período de capitalização. São exemplos de taxas nominais...

- 12% ao ano, capitalizados mensalmente;
- 24% ao ano, capitalizados semestralmente;
- 10% ao ano, capitalizados trimestralmente.

A transformação da taxa nominal em taxa efetiva é *sempre* realizada no regime de capitalização simples, por convenção de mercado. Mesmo que o problema a ser resolvido envolva capitalização composta...

1.3 Taxas Equivalentes

Já falamos em taxa nominal e taxa efetiva...

E o que são, afinal, *taxas equivalentes*?

Comecemos, então, com as taxas proporcionais – juros simples...

Na Matemática Financeira, dizemos que duas ou mais taxas são equivalentes quando o *regime* de capitalização é *composto*. Quando o *regime* de capitalização é *simples*, as taxas equivalentes são chamadas de *proporcionais*. Assim, duas ou mais taxas serão proporcionais quando, ao serem aplicadas a um mesmo principal, durante um mesmo prazo, no regime de capitalização simples, produzirem um mesmo montante acumulado no final daquele prazo.

1.3.1 Equivalência com Juros Simples

Como sabemos, devemos trabalhar com os períodos das taxas de juros e os prazos – a duração – das operações financeiras nas mesmas unidades de tempo. Ocorre que, às vezes, as taxas de juros são apresentadas em anos – 20% ao ano, por exemplo –, enquanto nossa aplicação renderá apenas alguns meses – 4 meses, por exemplo. Nesses casos, devemos converter a taxa de juros anual para sua equivalente* mensal.

**equivalente...*
Significa então de mesmo valor, ou que vale a mesma coisa.

Duas ou mais taxas são ditas equivalentes quando, ao serem aplicadas a um mesmo principal, durante um mesmo prazo, produzem, ao final desse prazo, um mesmo montante.

Ao tratarmos de juros simples, a fórmula de equivalência no tempo é...

Taxa Mensal × 12 = Taxa Anual ou $\mathbf{i_m \times 12 = i_a}$

Onde...

- $\mathbf{i_m}$ é a taxa de juros mensal;
- $\mathbf{i_a}$ é a taxa de juros anual.

Assim, se temos uma taxa mensal de 1%, a taxa semestral equivalente é...

$$\mathbf{1\% \times 6 = 6\%}$$

Por estarmos tratando de proporcionalidade, esse cálculo pode ser efetuado também por regra de três.

1.3.1.1 Generalização

Generalizando...

- Taxa mensal ($\mathbf{i_m}$) para taxa anual ($\mathbf{i_a}$) .... $\mathbf{i_a = i_m} \times 12$;
- Taxa mensal ($\mathbf{i_m}$) para taxa semestral ($\mathbf{i_s}$) .... $\mathbf{i_s = i_m} \times 6$;
- Taxa mensal ($\mathbf{i_m}$) para taxa trimestral ($\mathbf{i_t}$) .... $\mathbf{i_t = i_m} \times 3$;
- Taxa diária ($\mathbf{i_d}$) para taxa mensal ($\mathbf{i_m}$) .... $\mathbf{i_m = i_d} \times 30$;
- Taxa anual ($\mathbf{i_a}$) para taxa mensal ($\mathbf{i_m}$) .... $\mathbf{i_m = i_a} / 12$;
- Taxa mensal ($\mathbf{i_m}$) para taxa diária ($\mathbf{i_d}$) .... $\mathbf{i_d = i_m} / 30$.

$$\mathbf{i_d \times 360 = i_m \times 12 = i_t \times 4 = i_s \times 2 = i_a}$$

E assim sucessivamente...

1.3.2 Exemplo 1

Para entendermos o significado de uma taxa nominal, precisamos identificar as taxas efetivas implícitas nas taxas nominais...

12% aa capitalizados mensalmente são transformados em uma taxa efetiva de 12% aa / 12 meses .... 1% ao mês.

24% aa capitalizados semestralmente são transformados em uma taxa efetiva de 24% aa / 2 semestres .... 12% ao semestre.

10% aa capitalizados trimestralmente são transformados em uma taxa efetiva de.... 10% aa / 4 trimestres .... 2,5% ao trimestre.

Lembre-se de que você deve sempre usar esse procedimento para determinar a taxa efetiva embutida na taxa nominal.

Vejamos outro exemplo...

1.3.3 Exemplo 2

Uma determinada empresa solicitou a 2 bancos o desconto de R$ 1.000.000,00 em duplicatas – todas com vencimento dentro de 3 meses.

Proposta *Banco BX* – taxa de desconto de duplicatas – 2% a.m.*

* O banco exige um saldo médio de 30% do valor da operação a título de reciprocidade bancária[1].

[1]*Reciprocidade bancária...*
São exigências que as instituições fazem, eventualmente, para realizar operações financeiras para seus clientes. Exemplo disso é a exigência de um saldo médio na conta de uma empresa para realizar o desconto de duplicatas. Além dos juros de uma operação bancária, essas operações apresentam custos adicionais, já que, na prática, a taxa de juros efetivamente paga é superior à taxa anunciada.

Proposta *Banco BW* – taxa de desconto de duplicatas – 2,75% ao mês, sem taxas adicionais, nem qualquer reciprocidade do cliente.

A empresa analisou as duas propostas e optou por realizar a operação com o Banco BX.

- Qual foi o valor creditado na conta da empresa?
- Qual a taxa de rentabilidade mensal do Banco BX, a juros simples, sem o saldo médio e com o saldo médio?
- A empresa escolheu o melhor banco para descontar suas duplicatas?

Vamos resolver esse problema por partes...

1.3.3.1 Resolução

Uma determinada empresa solicitou a 2 bancos o desconto de R$ 1.000.000,00 em duplicatas – todas com vencimento dentro de 3 meses.

Proposta *Banco BX* – taxa de desconto de duplicatas – 2% a.m.*

* O banco exige um saldo médio de 30% do valor da operação a título de reciprocidade bancária.

Proposta *Banco BW* – taxa de desconto de duplicatas – 2,75% ao mês, sem taxas adicionais, nem qualquer reciprocidade do cliente.

Qual foi o valor creditado na conta da empresa e qual a taxa de rentabilildade mensal do *Banco BX*, a juros simples, sem o saldo médio?

Se o *Banco BX* não exigisse saldo médio, utilizando a fórmula para desconto, poderíamos calcular o valor que seria creditado...

Valor a ser creditado...

$\mathbf{VP} = \mathbf{VF}\ (1 - \mathbf{i} \times \mathbf{n})$

$\mathbf{VP} = 1.000.000\ (\ 1 - 0{,}02 \times 3)$

$\mathbf{VP} = 940.000{,}00$

Uma vez descoberto o **VP**, podemos calcular a taxa de rentabilidade...

Taxa de rentabilidade mensal...

$\mathbf{VF} = \mathbf{VP}\ (\mathbf{1} + \mathbf{i} \times \mathbf{n})$

$1.000.000 = 940.000\ (\ 1 + \mathbf{i} \times 3)$

$\mathbf{i} = 0{,}02128 = 2{,}128\%$ ao mês.

Agora que já temos o **VP** da operação sem saldo médio, vamos guardar esse valor, para ver qual foi o valor creditado na conta da empresa, que teve de deixar um saldo médio parado no banco...

1.3.3.2 Continuação

Uma determinada empresa solicitou a 2 bancos o desconto de R$ 1.000.000,00 em duplicatas – todas com vencimento dentro de 3 meses.

Proposta *Banco BX* – taxa de desconto de duplicatas – 2% a.m.*

* O banco exige um saldo médio de 30% do valor da operação a título de reciprocidade bancária.

Proposta *Banco BW* – taxa de desconto de duplicatas – 2,75% ao mês, sem taxas adicionais, nem qualquer reciprocidade do cliente.

Qual foi o valor creditado na conta da empresa e qual a taxa de rentabilidade mensal do *Banco BX*, a juros simples, com o saldo médio[1]?

[1]*saldo médio...*

O saldo médio exigido pelo banco é 30% de R$ 1.000.000,00, ou seja, R$ 300.000,00. Na prática, é como se o banco, por ocasião da liberação dos recursos, fizesse uma retenção de R$ 300.000,00.

Assim, o valor líquido efetivamente disponível será de R$ 640.000,00 (R$ 940.000,00* – R$ 300.000,00).

Nesse caso, R$ 300.000,00 ficarão parados no banco durante os 3 meses.

Na liquidação da operação – ao final do 3º mês –, a empresa precisará desembolsar apenas R$ 700.000,00, pois o banco já dispõe dos R$ 300.000,00 que nunca foram utilizados pela empresa.

**R$ 940.000,00...*

Quando aplicamos a fórmula para desconto com os valores fornecidos pela proposta do *Banco BX*, descobrimos que o **VP** seria de R$ 940.000,00.

Considerando o saldo médio, aplicando a fórmula para desconto, vamos descobrir a **taxa efetiva** dessa operação...

Taxa de desconto paga...

$\mathbf{VP} = \mathbf{VF}\ (1 - \mathbf{i} \times \mathbf{n})$

$640.000 = 700.000\ (1 - \mathbf{i} \times 3)$

$640.000 = 700.000\ (1 - 3\,\mathbf{i})$

$640.000 = 700.000 - 2.100.000\mathbf{i}$

$2.100.000\mathbf{i} = 700.000 - 640.000$

$\mathbf{i} = 60.000 / 2.100.000 = 0{,}02857 = 2{,}857\%$ ao mês.

Taxa de rentabilidade mensal...

$\mathbf{VF} = \mathbf{VP}(1 + \mathbf{i} \times n)$

$700.000 = 640.000(1 + \mathbf{i} \times 3)$

$\mathbf{i} = 3{,}125\%$

A taxa realmente cobrada pelo *Banco BX* é de 2,857% ao mês. A empresa teria feito melhor negócio se tivesse optado pelo *Banco BW*, que cobra 2,75% ao mês para desconto de duplicatas.

1.4 Operações com Juros Simples

Quando se trata de juros simples, as taxas equivalentes são também proporcionais. A relação é linear.

Para podermos tomar decisões administrativas, devemos calcular a taxa de juros que, na prática, estamos pagando sobre um empréstimo. **Reciprocidades bancárias e cobranças adicionais* embutem taxas de juros maiores**.

> **Cobranças adicionais...*
> Referem-se a cobranças de valores para liberação de crédito, análise de cadastro, confecção de fichas, tarifas...

Vejamos, agora, como se dá esse processo na capitalização composta...

1.5 Operações com Juros Compostos

Ao tratarmos de juros compostos, a fórmula de equivalência no tempo é...

$$(1 + \mathbf{i}_m)^{12} = (1 + \mathbf{i}_a)$$

Por estarmos tratando de juros compostos, não existe proporcionalidade. Logo, não podemos efetuar esses cálculos por regra de três.

Onde...

- $\mathbf{i}_m$ é a taxa de juros mensal;
- $\mathbf{i}_a$ é a taxa de juros anual.

Taxa mensal (**im**) para taxa anual (**ia**) .... $(1 + \mathbf{i}_m)^{12} = (1 + \mathbf{i}_a)$
Taxa mensal (**im**) para taxa semestral (**is**) .... $(1 + \mathbf{i}_m)^{6} = (1 + \mathbf{i}_s)$
Taxa taxa diária (**id**) para taxa mensal (**im**) ...... $(1 + \mathbf{i}_d)^{30} = (1 + \mathbf{i}_m)$
Taxa mensal (**im**) para taxa trimestral (**it**) .... $(1 + \mathbf{i}_m)^{3} = (1 + \mathbf{i}_t)$

Generalizando...

$$(1 + \mathbf{i}_d)^{360} = (1 + \mathbf{i}_m)^{12} = (1 + \mathbf{i}_t)^{4} = (1 + \mathbf{i}_s)^{2} = (1 + \mathbf{i}_a)$$

1.5.1 Aplicação

Repetindo...

Quando se trata de juros compostos, taxas equivalentes não são proporcionais. Em juros simples, taxas equivalentes são proporcionais.

Veja dois exemplos bem rápidos...

A taxa de juros em regime de capitalização composta de 10% ao mês é equivalente a 21% ao bimestre.

Exemplo numérico...
R$ 100,00, aplicados a 10% ao mês, valerão, em 2 meses, R$ 121,00.

A taxa de juros em regime de capitalização composta de 1% ao mês é equivalente a 12,6825% ao ano*.

**12,6825% ao ano...*
Veja como chegamos a esse número...

Utilizando a fórmula...	$(1 + \mathbf{i_m})^{12} = (1 + \mathbf{i_a})$
A fórmula para conversão é...	$(1 + 0{,}01)^{12} = (1 + \mathbf{i_a})$
Substituindo os valores...	$(1{,}01)^{12} = (1 + \mathbf{i_a})$
Calculando...	$1{,}12682503 = 1 + \mathbf{i_a}$
	$1{,}12682503 - 1 = \mathbf{i_a}$
Invertendo os lados...	$\mathbf{i_a} = 0{,}12682503$
	$\mathbf{i_a} = 12{,}6825\%$ ao ano

Exemplo numérico...
R$ 100,00, aplicados a 1% ao mês, terão um valor futuro, em 1 ano, de R$ 112,68.

1.5.1.1 Exemplo 1

João resolveu aplicar seu dinheiro para poder comprar um supercomputador. Qual o montante que João acumulará, ao final de 12 meses, a partir de um principal de R$ 1.000,00, com uma taxa de juros de 1% a.m., no regime de juros compostos?

Vejamos a resolução desse problema a partir...

da fórmula...

Do enunciado, tiramos que...

- **VP** = 1.000;
- **n** = 12;
- **VF** =?;
- **i** = 0,01*

**0,01...*
Temos de colocar a taxa de juros em base decimal. Assim, 1% equivale a 0,01 (forma unitária).

Aplicando a fórmula	**VF** = **VP** (1 + **i**)^n
Substituindo os valores...	**VF** = 1.000 (1 + 0,01)^{12}
Obtemos...	**VF** = 1126,83

da HP-12C...

Do enunciado, tiramos que...

- **VP** = 1.000;
- **n** = 12;
- **VF** =?;
- **i** = 1

Teclando 1.000 e, em seguida, o botão **PV** – valor presente.
Digitando 1 e, em seguida, o botão **i** – taxa de juros de 1% ao mês.
Digitando 12 e, em seguida, o botão **n** – prazo do empréstimo em meses.
Digitando 0 e, em seguida, o botão **PMT** – valor dos pagamentos.

Teclando, então, o botão **FV**, a calculadora apresentará no visor: **–1.126,83***.

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação dessa operação.

**–1.126,83...*

A calculadora apresentará no visor –1.126,83. O sinal do valor em **VF** será sempre diferente do sinal do valor em **VP**, posto que, para a calculadora, um valor é recebimento e outro pagamento (ou vice-versa).

Neste caso, se tivéssemos entrado com –1.000 **PV** (saída de caixa / aplicação), o resultado seria **FV** = 1.126,83 (entrada de caixa / resgate da aplicação).

pelo excel...

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação no excel.

João, intrigado, resolveu fazer as contas de outra forma...

Qual o montante que João acumulará, ao final de 1 ano, a partir de um principal de R$ 1000,00, com uma taxa de juros de 12,683%% a.a., no regime de juros compostos?

1.5.1.2 Exemplo 2

João resolveu aplicar seu dinheiro para poder comprar um supercomputador. Qual o montante que João acumulará, ao final de 1 ano, a partir de um principal de R$ 1.000,00, com uma taxa de juros de 12,683% a.a., no regime de juros compostos?

Vejamos a resolução desse problema a partir...

da fórmula...

Do enunciado, tiramos que...

- **VP** = 1.000;
- **n** = 1;
- **VF** =?;
- **i** = 0,12683

Aplicando a fórmula	$\mathbf{VF} = \mathbf{VP}\ (1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}$
Substituindo os valores...	$\mathbf{VF} = 1.000\ (1 + 0{,}12683)^1$
Obtemos...	$\mathbf{VF} = 1126{,}83$

da HP-12C...

Do enunciado, tiramos que...

- **VP** = 1.000;
- **n** = 1;
- **VF** =?;
- **i** = 12,683

Teclando 1.000 e, em seguida, o botão **PV** (valor presente).
Digitando 12,683* e, em seguida, o botão **i** (taxa de juros de 12,683% ao ano).
Digitando 1 e, em seguida, o botão **n** (prazo do empréstimo em anos).
Digitando 0 e, em seguida, o botão **PMT** (valor dos pagamentos**).**

**12,683...*
Repare que, na HP-12C, a vírgula que separa as casas decimais é representada por ponto.

Teclando, então, o botão **FV**, a calculadora apresentará no visor: **–1.126,83**.

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação dessa operação.

pelo excel...

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação no excel.

Conclusão...

Os juros de 1% a.m. produziram um crescimento efetivo do dinheiro de 12,683% a.a. Assim, as taxas de 1% a.m. e de 12,683% a.a. são taxas equivalentes.

Vimos que, quando se trata de juros compostos, taxas equivalentes não são proporcionais. Neste exemplo, o tempo foi aumentado em 12 vezes – de mês para ano – e a taxa aumentou mais de 12 vezes, o que significa que tempo / taxa de juros não seguem a mesma proporção.

Antes de passarmos para os exercícios, vejamos um último exemplo...

1.5.1.3 Exemplo 3

O gerente de seu banco lhe oferece uma aplicação financeira com taxa nominal de 24% ao ano, com capitalização mensal. Se você aplicar R$ 100,00, quanto terá ao final de 1 ano?

Se me oferecem uma taxa nominal anual, com capitalização mensal, qual a primeira coisa que tenho a fazer?

Se pensou em encontrar a taxa efetiva mensal, acertou!

Encontrando a taxa efetiva mensal*...
24% ao ano capitalizados mensalmente são equivalentes a 0,24/12 = 0,02 = 2%a.m.

**Encontrando a taxa efetiva mensal...*
No início dessa unidade vimos que a taxa nominal é bastante utilizada no mercado, entretanto, seu valor nunca é usado nos cálculos – sejam eles de juros simples ou compostos -, por não representar uma taxa efetiva. O que realmente interessa é a taxa efetiva embutida na taxa nominal...

Lembra-se dos exemplos que analisamos?

– 12% aa, capitalizados mensalmente, significam uma taxa efetiva de 12 % aa / 12 meses = 1% ao mês.

– 24% aa, capitalizados semestralmente, significam uma taxa efetiva de 24%aa / 2 semestres = 12% ao semestre.

Agora que já sabemos que a **taxa** efetiva da operação é de **2% am**. e que o **prazo** é de **12 meses**, podemos resolver o problema de três formas...

da fórmula...

Já sabemos que a **taxa** efetiva da operação é de **2% am**. e que o **prazo** é de **12 meses**...

- **VP** = 100;
- **n** = 12;

- **VF** =?;
- **i** = 0,02

Aplicando a fórmula	**VF = VP (1 + i)^{n}**
Substituindo os valores...	**VF =** 100 (1 + 0,02)^{12}
	VF = 100 (1 × 1,268242)
Obtemos...	**VF** = 1,268242

da HP-12C...

Já sabemos que a **taxa** efetiva da operação é de **2% am**. e que o **prazo** é de **12 meses**...

- **VP** = 100;
- **n** = 12;
- **VF** =?;
- **i** = 2

Teclando 100 e, em seguida, o botão **PV** (valor presente).
Digitando 2 e, em seguida, o botão **i** (taxa de juros de 2% ao mês).
Digitando 12 e, em seguida, o botão **n** (prazo do empréstimo em meses).
Digitando 0 e, em seguida, o botão **PMT** (valor dos pagamentos**)**.

Teclando, então, o botão **FV**, a calculadora apresentará no visor: **–126,82.**

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação dessa operação.

pelo excel...

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação no excel.

Conclusão...

A taxa anual equivalente – 26,82% ao ano – a essa taxa efetiva embutida – 2% ao mês – é maior do que a taxa nominal que lhe deu origem – 24% ao ano nominal –, pois essa equivalência ocorre no regime de juros compostos.

1.6 Lista de Exercícios

Acesse, no ambiente *on-line*, a lista de exercícios desta unidade.

1.7 Síntese

Acesse, no ambiente *on-line*, a síntese desta unidade.

UNIDADE 2 – SÉRIES DE PAGAMENTOS

2.1 Conceitos

Alguns dos conceitos mais importantes de Matemática Financeira são aqueles que fazem parte do dia a dia das empresas em suas análises e decisões de investimento.

Os conceitos a que nos referimos são...

- séries de pagamentos;
- pagamentos uniformes;
- anuidades;
- perpetuidades;
- pagamentos não uniformes;
- pagamentos balão – intermediárias.

2.2 Anuidades – Pagamentos Iguais

Você sabe o que é anuidade? Vejamos...

Uma anuidade consiste em uma série uniforme de pagamentos – ou recebimentos – iguais e sucessivos.

Esses pagamentos devem ser feitos ao final de cada período de tempo.

Conforme o intervalo de tempo em que os pagamentos são feitos, eles podem ser classificados, por exemplo, em...

- mensalidade;
- semestralidade;
- anuidade.

2.2.1 Resolução de Questões

E como resolver questões que envolvem anuidades?

As questões de anuidade podem ser resolvidas com ajuda de uma calculadora ou pode-se, ainda, lançar mão de fórmulas para resolvê-las.

Vejamos fórmulas para resolver anuidades para quem não gosta de usar calculadora...

$$PV = PMT \{[(1 + i)^n - 1] / i (1+ i)^n\}$$
$$PMT = VP^* (i *(1+ i)\hat{}n / (((1 + i)\hat{}n) - 1)$$
$$FV = PMT \{[(1 + i)^n - 1] / i\}$$
$$PMT = FV \{i / [(1 + i)^n - 1]\}$$
$$n = Log (FV / PV) / Log (1+i)$$

Onde...

- **i** é a taxa de juros composta;
- **n** é o período de duração do financiamento ou empréstimo.

2.3 Apresentação do Exemplo

Já conhecemos o conceito de anuidade e as fórmulas que nos ajudam a resolvê-las.

Que tal vermos alguns exemplos de situações em que é necessário calcular uma anuidade?

A partir de agora, teremos a oportunidade de acompanhar exemplos a respeito do tema, bem como suas soluções.

Dessa forma, tiraremos dúvidas sobre o cálculo dessa série uniforme de pagamento.

2.3.1 Exemplo 1

Vejamos o primeiro exemplo sobre anuidade!

Suponhamos que você deposite R$ 100,00 hoje e mais R$ 100,00 a cada final de ano, durante três anos, em uma poupança.

Consideremos que a poupança renda 10% ao ano.

Quanto você poderá retirar ao final desses três anos?

Atenção! Neste caso, o nosso interesse é calcular o valor futuro da anuidade.

Solução

Utilizando as fórmulas...

T = 0	**t** = 1	**t** = 2	**t** = 3
100	100	100	100

VF = **PV** $(1 + \mathbf{i})^3$ + **PMT** $(1 + \mathbf{i})^2$ + **PMT** $(1 + \mathbf{i})$ + **PMT**

VF = $100 \times 1{,}1^3 + 100 \times 1{,}1^2 + 100 \times 1{,}1 + 100 = 464{,}10$

Com a calculadora, obtemos...

N = 3 **PMT** = 100
VP = 100 **i** = 10% aa

VF = 464,10

Resposta: O valor futuro desta anuidade é R$ 464,10.

2.3.2 Exemplo 2

Há várias situações em que precisamos calcular uma anuidade.

Analisemos mais uma...

Imaginemos que você precise retirar R$ 100,00 a cada final de ano, durante três anos, em uma poupança.

Consideremos que a poupança renda 10% ao ano.

Quanto você precisa ter hoje depositado nessa poupança?

Atenção! Neste caso, nosso interesse é calcular o valor presente da anuidade.

Solução

Utilizando as fórmulas...

T = 0	**t** = 1	**t** = 2	**t** = 3
VP = ?	–100	–100	–100

VP = **PMT** / (1 + **i**) + **PMT** / (1 + **i**)^2 + **PMT** / (1 + **i**)^3
VP = 100 / 1,1 + 100 / 1,1^2 + 100 / 1,1^3 = 248,68

Com a calculadora, obtemos...

N = 3	**PMT** = –100
VF = 0	**i** = 10% aa

VF = 248,68

Resposta: O valor presente desta anuidade é R$ 248,68.

2.3.3 Exemplo 3

Consideremos, neste terceiro exemplo, que você tenha emprestado R$ 2.000,00 hoje e mais R$ 100,00 a cada final de ano, durante três anos, a seu cunhado.

Vocês acertaram que a taxa de juros seria de 10% ao ano.

Quanto você deverá receber ao final desses três anos?

Atenção! Neste caso, nosso interesse é calcular o valor futuro da anuidade.

Solução

Utilizando as fórmulas...

T = 0	**t** = 1	**t** = 2	**t** = 3
–2.000	–100	–100	–100

VF = PV (1 + **i**)^3 + **PMT** (1 + **i**)^2 + **PMT** (1 + **i**) + **PMT**
VF = 2.000 × 1,1^3 + 100 × 1,1^2 + 100 × 1,1 + 100 = 2.993,00

Com a calculadora, obtemos...

N = 3	**PMT** = –100
VP = –2.000	**i** = 10% aa

VF = 2.993,00

Resposta: O valor futuro desta anuidade é R$ 2.993,00.

2.3.4 Exemplo 4

Vamos ao último exemplo sobre anuidade...

Suponhamos que você deposite R$ 2.000,00 hoje em sua poupança, que rende 10% ao ano.

Suponhamos agora que você vai retirar R$ 100,00 a cada final de ano, durante três anos.

Quanto você poderá ainda retirar ao final desses três anos?

Atenção! Neste caso, nosso interesse é calcular o valor futuro da anuidade.

Solução

Utilizando as fórmulas...

T = 0	**t** = 1	**t** = 2	**t** = 3
2.000	–100	–100	–100

VF = **PV** (1 + **i**)³ – **PMT** (1 + **i**)² – **PMT** (1 + **i**) – **PMT**

VF = 2.000 × 1,3310 – 100 × 1,2100 – 100 × 1,1 – 100 = 2.331,00

Com a calculadora, obtemos...

N = 3	**PMT** = –100	
VP = 2.000	**i** = 10% aa	**VF** = 2.331,00

Resposta: O valor futuro desta anuidade é R$ 2.331,00.

2.3.5 Lista de Exercícios

Acesse, no ambiente *on-line*, a lista de exercícios desta unidade.

2.4 Perpetuidades

A perpetuidade é um conjunto de pagamentos – ou recebimentos – que não acabam nunca.

São pagamentos periódicos que duram para sempre, que não têm prazo para terminar.

Por isso, recebem o nome de perpetuidade.

Obviamente, uma perpetuidade para um investidor é perpétua enquanto o investidor não vender a perpetuidade para outro investidor.

Uma perpetuidade não tem limite de tempo, não tem data para acabar.

Um exemplo é a caderneta de poupança, que paga juros de 0,5% ao mês, todos os meses, sem data limite para acabar.

2.4.1 Exemplos

Vejamos uma demonstração do que é perpetuidade...

Exemplo 1...

Consideremos que você tenha investido R$ 100.000,00 em uma aplicação perpétua, que pague 10% ao ano.

Você vai receber, a cada ano, em perpetuidade, R$ 10.000,00 a título de juros.

Pois...

R$ 100.000 x 10% = R$ 10.000

Exemplo 2...

Obviamente, o dia em que você retirar os R$ 100.000,00 da aplicação, vai deixar de receber os juros de R$ 10.000,00.

É uma escolha, pois, à taxa de 10% ao ano, os R$ 100.000 hoje na mão é equivalente a um fluxo de R$ 10.000 em perpetuidade.

Então, podemos dizer que receber R$ 10.000,00 periodicamente, em regime de perpetuidade, é a mesma coisa que ter hoje na mão o valor presente de R$ 100.000,00, considerando uma taxa para aplicação de 10% ao ano.

A fórmula que relaciona o investimento a valor presente – hoje – com o pagamento dos fluxos em perpetuidade é...

$$\mathbf{VP = FC_1 / i}$$

2.5 Resumo das Fórmulas

Resumindo, até agora, já aprendemos a calcular o valor presente de...

- um único pagamento futuro >> **VP** = **FCn** / (1 + **i**)^n
- diversos pagamentos futuros >> **VP** = Σ**t** = 1**t** = **n FC's**/(1 + **i**)^n
- perpétuos pagamentos futuros >> **VP** = **FC**$_1$ / **i**

2.6 Apresentação dos Exercícios

Temos aprendido várias fórmulas...

O melhor modo de fixá-las é por meio de exemplos e exercícios!

2.6.1 Exemplo 1

Vejamos o exemplo...

Imaginemos que você queira alugar um imóvel. O imóvel está avaliado em R$ 100.000,00.

A taxa de retorno para aluguéis nessa região é de 0,5% ao mês.

Como calcular o aluguel?

Solução

VP = **FC**$_1$ / **i**
100.000 = **FC**$_1$ / 0,005
FC$_1$ = 500,00

Resposta: O aluguel mensal é R$ 500,00.

2.6.2 Exemplo 2

Consideremos, neste exemplo, que você queira alugar um imóvel... O aluguel é R$ 1.000,00.

A taxa de retorno para aluguéis nessa região é de 1,0% ao mês.

Qual deve ser o valor desse imóvel?

Solução

VP = **FC_1** / i
VP = 1.000 / 0,01
FC_1 = 100.000,00

Resposta: O valor desse imóvel hoje é R$ 100.000,00.

2.6.3 Exemplo 3

Que tal analisarmos mais um exemplo?

Suponhamos que seu imóvel esteja avaliado em R$ 200.000,00. E que você consiga alugá-lo facilmente no mercado por R$ 1.000,00.

Qual a taxa de retorno que você obteria?

Solução

VP = **FC_1** / **i**
200.000 = 1.000 / **i**
i = 1.000 / 200.000 = 0,005 = 0,5% ao mês

Resposta: A taxa de retorno desse imóvel seria de 0,5% ao mês.

2.6.4 Exemplo 4

O exemplo desta tela demonstra a relação entre pagamentos periódicos e seu valor à vista.

Primeiro, serão apresentadas diversas questões.

Depois, você verá uma explicação sobre elas. O exemplo é longo, por isso, acompanhe-o com calma.

Acesse, no ambiente *on-line*, o exemplo desta unidade.

2.6.5 Exercícios

Acesse, no ambiente *on-line*, os exercícios desta unidade.

2.7 Fluxos Não Uniformes

Como já sabemos, uma anuidade tem como característica básica o fato de ser uma série constante de pagamentos – ou recebimentos.

Muitas vezes, no entanto, nos deparamos com uma série de pagamentos que são diferentes ao longo do tempo, que não tem relação entre si, especialmente na análise de fluxos de caixa de projetos de investimento de empresas.

Esses pagamentos são os chamados fluxos não uniformes.

Vejamos um exemplo...

T = 0	**t** = 1	**t** = 2	**t** = 3
0	294.000	616.000	938.000

2.8 Cálculo de um Valor Presente de um Fluxo Não Uniforme na Fórmula

Vamos calcular o valor presente de um fluxo não uniforme pela fórmula?

O valor presente de um fluxo não uniforme pode ser calculado achando-se o valor presente de cada fluxo individualmente, e somando-se depois todos os valores encontrados.

Supondo uma taxa de juros de 20% por período, temos...

T = 0	**t** = 1	**t** = 2	**t** = 3
0	294.000	616.000	938.000

$\mathbf{VP}\ (\mathbf{FC_1}) = \mathbf{FC_1} / (1 + \mathbf{i})^1 = 245.000{,}00$
$\mathbf{VP}\ (\mathbf{FC_2}) = \mathbf{FC_2} / (1 + \mathbf{i})^2 = 427.777{,}78$
$\mathbf{VP}\ (\mathbf{FC_3}) = \mathbf{FC_3} / (1 + \mathbf{i})^3 = 542.824{,}07$

Total (**t** = 0) = 245.000,00 + 27.777,78 + 542.824,07 = 1.215.601,85

2.9 Cálculo de um Valor Presente de um Fluxo Não Uniforme na Calculadora

Vamos calcular o valor presente de um fluxo de caixa não uniforme na calculadora?

Podemos utilizar a calculadora financeira, ou mesmo a planilha Excel para automatizar os cálculos necessários.

Considere o mesmo fluxo anterior. O procedimento passo a passo para HP-12C envolve o uso das teclas azuis, que são acessadas sempre que se digita a tecla *g*, é o seguinte...

1	0	**g**	**CFo**
2	294.000	**g**	**CFj**
3	616.000	**g**	**CFj**
4	938.000	**g**	**CFj**
6	20	**i**	
7		**f**	**NPV**

Obtemos, então, 1.215.601,85.

2.10 Pagamentos Balão – Pagamentos Intermediários

São encontrados, eventualmente, nos pagamentos das mensalidades e anuidades, alguns pagamentos intermediários com valores mais elevados.

> Esses pagamentos visam atender as necessidades, os perfis, ou as características dos fluxos de caixa dos credores e devedores.

2.10.1 Exemplo

Imaginemos esta situação...

Um tomador de financiamento para a compra de um automóvel gostaria de usar integralmente o pagamento do décimo terceiro salário, todos os anos, para acelerar o pagamento da dívida.

Então as prestações do seu financiamento incluirão, a cada 12 meses, uma prestação maior, coincidindo com o recebimento do décimo terceiro salário.

> Procedendo dessa forma, ao invés de financiar em 48 meses, o indivíduo poderia quitar o financiamento, por exemplo, em 36 meses.
>
> E, melhor de tudo, pagando as mesmas prestações mensais.
>
> Chamamos esses pagamentos anuais extras de *intermediária*.

2.10.2 Exemplo 2

Agora, imaginemos esta situação...

Uma construtora financia a venda de imóveis residenciais novos ainda em construção.

Quando o imóvel fica pronto, na hora da entrega das chaves, a construtora cobra um pagamento maior, chamado de pagamento para entrega das chaves.

Esse pagamento é chamado de *pagamento balão*.

Depois, continuam as prestações menores, já com o comprador morando no imóvel.

2.10.3 Exemplo 3

Dessa vez, veremos um exemplo que inclui cálculos.

Consideremos que você tenha um financiamento de casa própria.

Você deve pagar 60 prestações mensais e sucessivas no valor de R$ 950,00 cada.

Além dessas prestações, você deve pagar, a cada seis meses, uma intermediária no valor de R$ 4.000,00.

A taxa de juros é de 1% ao mês.

Qual é o valor presente do financiamento?

Solução

Cálculo do VP das mensais...
PMT = 950 mensais
N = 60 meses
FV = 0
i = 1% ao mês
PV = ?

Cálculo do VP das semestrais...
PMT = 4.000 semestrais
N = 10 semestres
FV = 0
i = 6,15201506% ao semestre
PV = ?

Somando o **VP** das duas sequências de pagamentos obtemos o resultado.

Resposta: O valor presente do financiamento é R$ 71.936,76.

2.10.4 Lista de Exercícios

Acesse, no ambiente *on-line*, a lista de exercícios desta unidade.

2.11 Síntese

Acesse, no ambiente *on-line*, a síntese desta unidade.

UNIDADE 3 – SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃOE EQUIVALÊNCIAS DE FLUXOS DE CAIXA

3.1 Amortização de Empréstimo

Um empréstimo pode ser amortizado – pago – de diferentes formas. Os sistemas mais conhecidos e utilizados no mercado são...

Sistema de pagamento final – pagam-se os juros capitalizados mais o principal ao final...

O financiamento é pago, de uma única vez, no final, juros mais principal. Os juros são capitalizados (mas não pagos), ao final de cada período – mês ou ano. Esta modalidade de pagamento é utilizada em papéis de renda fixa – letras de câmbio ou certificados de depósito com renda final – e títulos descontados em banco comercial.

Sistema de pagamento periódico de juros – onde o principal é pago apenas ao final...

Somente o pagamento de juros é realizado ao final de cada período e, ao final do prazo do empréstimo, além dos juros do último período, é pago o principal integral. Este sistema é conhecido também como sistema americano de amortização.

Esta modalidade é utilizada em papéis de renda fixa com renda paga periodicamente – letras de câmbio com renda mensal, certificados de depósito com renda mensal, trimestral...

Sistema de Prestações Iguais – PRICE...

Sistema de prestações iguais (também conhecido como sistema francês)...

A parcela periódica de pagamentos – prestações – compreende os juros do período mais a amortização de parte do principal. Esta modalidade é utilizada em financiamentos imobiliários e crédito direto ao consumidor. Seu cálculo pode ser assim processado...

- cálculo do valor da prestação constante – com o uso de tabelas[1] ou de calculadoras;
- cálculo dos juros do período, pela aplicação da taxa do contrato sobre os valores do saldo – remanescente do principal no início do período;
- cálculo da amortização do principal, pela diferença entre o valor da prestação e o valor dos juros do período.

Observamos que os juros de cada prestação vão diminuindo com o tempo, pois o principal remanescente vai se tornando cada vez menor. Como o valor da prestação é constante, a parcela de amortização de cada prestação aumenta ao longo do tempo.

[1]*tabelas...*

Veja abaixo um exemplo de uma tabela PRICE:

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%
1	1,01000	1,02000	1,03000	1,04000	1,05000	1,06000	1,07000	1,08000
2	0,50751	0,51505	0,52261	0,53020	0,53780	0,54544	0,55309	0,56077
3	0,34002	0,34675	0,35353	0,36035	0,36721	0,37411	0,38105	0,38803
4	0,25628	0,26262	0,26903	0,27549	0,28201	0,28859	0,29523	0,30192
5	0,20604	0,21216	0,21835	0,22463	0,23097	0,23740	0,24389	0,25046
6	0,17255	0,17853	0,18460	0,19076	0,19702	0,20336	0,20980	0,21632
7	0,14863	0,15451	0,16051	0,16661	0,17282	0,17914	0,18555	0,19207
8	0,13069	0,13651	0,14246	0,14853	0,15472	0,16104	0,16747	0,17401
9	0,11674	0,12252	0,12843	0,13449	0,14069	0,14702	0,15349	0,16008
10	0,10558	0,11133	0,11723	0,12329	0,12950	0,13587	0,14238	0,14903

É so escolher a taxa e o número de parcelas e então multiplicar o valor a ser financiado pelo fator da tabela. Se você quiser conferir pela calculadora*...

**calculadora...*

Exemplo: Você quer trocar de automóvel. Seu carro velho está avaliado em R$ 10.000,00. O carro novo custa R$ 18.000,00. Você pode financiar a diferença em 8 pagamentos pelo sistema PRICE com juros de 3% ao mês. Qual é o valor de cada prestação?

Cálculo pela calculadora:

VP = 8.000,00

I = 3%

N = 8

VF = 0

PMT = 1.139,65

Sistema de Amortizações Constantes – 'SAC'...

O sistema SAC é utilizado em financiamentos imobiliários e financiamentos a empresas por parte de entidades governamentais ou privadas. Esse financiamento é pago em prestações decrescentes. Cada parcela compreende pagamento de juros e de amortização de parte do principal.

Para calculá-lo, devemos efetuar...

- o cálculo da amortização do principal, que tem valor constante em todas as prestações, por meio da divisão do principal pelo número de prestações;
- o cálculo dos juros do período, pela aplicação da taxa do contrato sobre valor do saldo – remanescente do principal – no início do período;
- o cálculo do valor da prestação pela soma da amortização do principal com os juros do período.

Em cada período, o principal remanescente decresce do valor de uma amortização. Como todas as amortizações são iguais, esse decréscimo será uniforme e, portanto, os juros dos períodos também serão uniformemente decrescentes ao longo do tempo.

Sistema de Amortização Misto – 'SAM'...

Pelo SAM – o sistema misto SAM é utilizado na liquidação de financiamentos da casa própria –, o principal é pago em parcelas periódicas, cujos valores correspondem à média do sistema PRICE e do sistema de amortizações constantes – SAC –, ou seja, sistema francês 50% e *SAC* 50%.

Para calculá-lo, devemos saber o valor...
– das prestações pelo sistema PRICE;
– das prestações pelo sistema SAC.

3.2 Desafio

Acesse, no ambiente *on-line*, um jogo sobre o conteúdo deste módulo.

3.2.1 Jogo

Acesse, no ambiente *on-line*, um jogo sobre o conteúdo deste módulo.

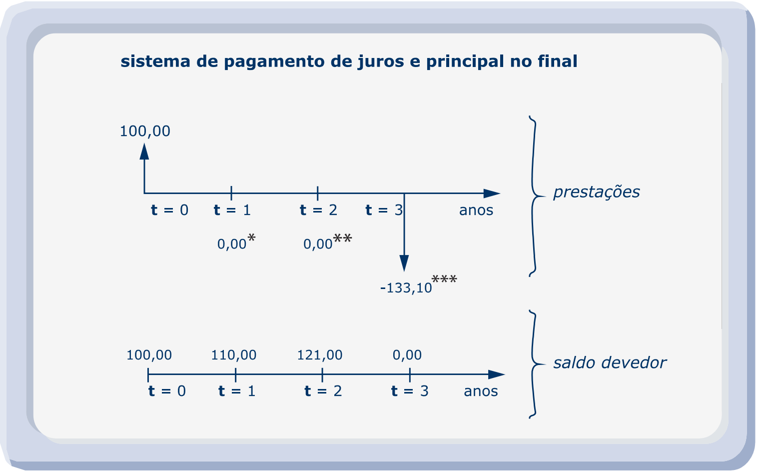
3.3 Estudo de Caso

O Banco Federal emprestou R$ 100,00 a um cliente, por três anos, cobrando uma taxa de juros de 10% ao ano. Esse empréstimo poderá ser liquidado de diferentes maneiras por meio do pagamento de prestações. Vejamos como seria pago pelos seguintes sistemas de amortização...

- pagamento no final;
- sistema PRICE;
- sistema SAM;
- pagamento periódico;
- sistema SAC.

3.3.1 Pagamento no Final

O Banco Federal emprestou R$ 100,00 a um cliente, por três anos, cobrando uma taxa de juros de 10% ao ano. Esse empréstimo poderá ser liquidado de diferentes maneiras, por meio do pagamento de prestações. Vejamos como seria pago pelo seguinte sistema de amortização...



**0,00...*

Como neste sistema o pagamento é todo feito no final – não há prestações intermediárias -, no final do primeiro ano, t =1, não há desembolso.

Memória de cálculo

Saldo devedor inicial (**t** = 0) ..... R$ 100,00

Saldo devedor em t = **1**... **VF** = **VP** (1 + **i**)

VF = 100 (1 + 0,1) **= 110**

Como nada foi pago, esse saldo devedor é levado ao período seguinte....
(**VP** em **t** = 2 será R$ 110,00)

***0,00...*

Como neste sistema o pagamento é todo feito no final – não há prestações intermediárias -, no final do segundo ano, t =2, também não há desembolso.

Memória de cálculo

Saldo devedor em **t** = 1 .... R$ 110,00

Saldo devedor em t = **2**... **VF** = **VP** $(1 + \mathbf{i})^1$ (estamos trabalhando ano a ano.)

VF = 110 (1 + 0,1) **= 121**

Como nada foi pago, esse saldo devedor é levado ao período seguinte....
(**VP** em **t** = 3 será R$ 121,00)

****–133,10...*

Como neste sistema o pagamento é todo feito no final, é exatamente no **t** = 3 – final do prazo do empréstimo – que tudo – principal + juros – será pago.

Memória de cálculo

Saldo devedor em **t** = 2 .... R$ 121,00

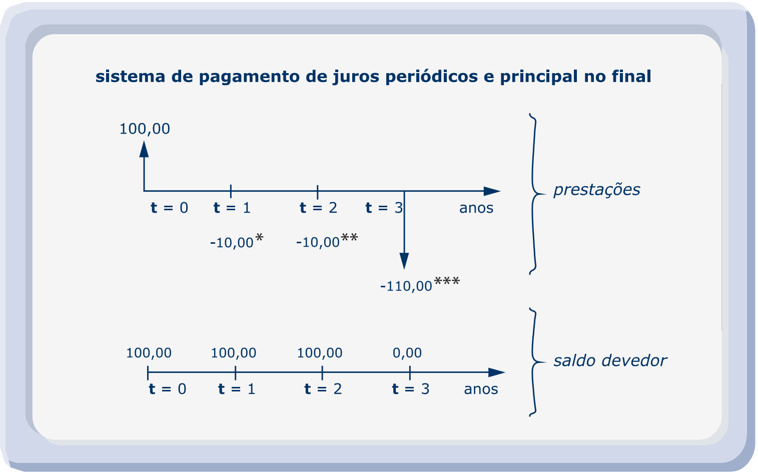
Saldo devedor em t = 3... VF = VP (1 + **i**)^1 (estamos trabalhando ano a ano.)

VF = 121 (1 + 0,1) = **133,10**

Saldo devedor em t = 3, após pagamento = R$ 0,00

3.3.2 Pagamento Periódico

O Banco Federal emprestou R$ 100,00 a um cliente, por três anos, cobrando uma taxa de juros de 10% ao ano. Esse empréstimo poderá ser liquidado de diferentes maneiras, por meio do pagamento de prestações. Vejamos como seria pago pelo seguinte sistema de amortização...



**–10,00...*

Como neste sistema, a cada período, é realizado o pagamento dos juros e, no final, o pagamento dos juros do último período mais o principal, no final do primeiro ano, **t** = 1, só pagamos os juros do primeiro ano da operação.

Memória de cálculo

Saldo devedor inicial (t = 0) ..... R$ 100,00

Saldo devedor em t = 1.... VF = **VP** (1 + **i**)

VF = 100 (1 + 0,1) = **110**

Com o pagamento dos juros no valor de R$ 10,00, o saldo devedor em **t** = 1, após o pagamento da prestação[1] é 110,00 – 10,00 = 100,00. Este é, pois, o saldo devedor levado para **t** = 2. (**VP** em **t** = 2 será R$ 100,00).

[1]*prestação...*
Prestação = amortização + juros.

Como, nesse caso, não há amortizações periódicas – o pagamento é feito todo ao final –, a prestação dos períodos intermediários passa a ser igual aos juros.

Em t = 1

Juros = 10,00
Amortização = 0,00
Prestação = 10,00

***–10,00...*
Como neste sistema, a cada período, é realizado o pagamento dos juros e, no final, o pagamento dos juros do último período mais o principal, no final do segundo ano, **t** = 2, só pagamos os juros relativos ao segundo ano da operação.

Memória de cálculo
Saldo devedor em **t** = 1 ..... R$ 100,00
Saldo devedor em t = 2... **VF** = **VP** (1 + **i**)^1 (estamos trabalhando ano a ano.)
VF = 100 (1 + 0,1) **= 110**

Com o pagamento dos juros no valor de R$ 10,00, o **saldo devedor em t = 2, após o pagamento da prestação**[1] é 110,00 – 10,00 = **100,00**. Este é, pois, o saldo devedor levado para **t** = 3. (**VP** em **t** = 3 será R$ 100,00).

[1]*prestação...*
Prestação = amortização + juros.

Como, nesse caso, não há amortizações periódicas – o pagamento é feito todo ao final –, a prestação dos períodos intermediários passa a ser igual aos juros.

Em t = 2

Juros = 10,00
Amortização = 0,00
Prestação = 10,00

****–110,00...*
Como neste sistema, a cada período, é realizado o pagamento dos juros e, no final, o pagamento dos juros do último período mais o principal, no final do último período, **t** = 3, pagamos os juros relativos a esse período + o principal.

Memória de cálculo
Saldo devedor em **t** = 2 ..... R$ 100,00
Saldo devedor em t = 3.... **VF** = **VP** (1 + **i**) (estamos trabalhando ano a ano.)
VF = 100 (1 + 0,1) = 110

Com o pagamento dos juros no valor de R$ 10,00, e do principal, no valor de R$ 100,00, o novo saldo devedor em t = 3, após o pagamento da prestação[1], é 110,00 – 110,00 **= 0,00**.

[1]prestação...
Prestação = amortização + juros.

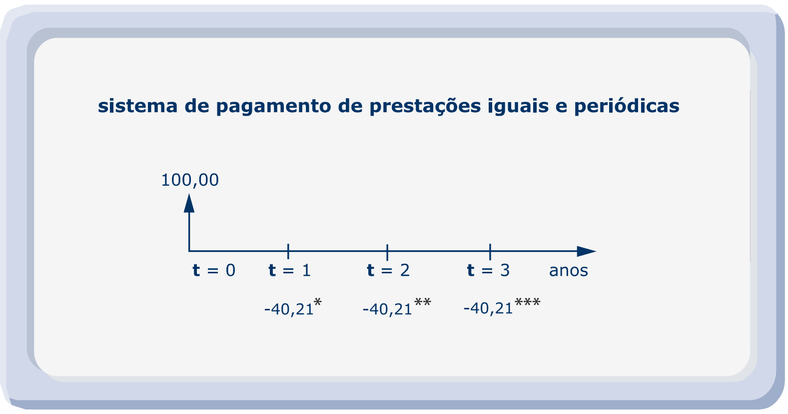
Como, nesse caso, não há amortizações periódicas – o pagamento é feito todo ao final –, é no último período que o principal é pago, juntamente com os juros do período.

Em t = 3

Juros = 10,00
Amortização = 0,00
Prestação = 110,00

3.3.3 Sistema PRICE

O Banco Federal emprestou R$ 100,00 a um cliente, por três anos, cobrando uma taxa de juros de 10% ao ano. Esse empréstimo poderá ser liquidado de diferentes maneiras, por meio do pagamento de prestações. Vejamos como seria pago pelo seguinte sistema de amortização...



**–40,21...*

Entendendo o *saldo devedor em* **t** = 1 e o que faz parte da prestação...

Memória de cálculo

Saldo devedor inicial **t** = 0..... R$ 100,00

Saldo devedor em t = 1.... **VF** = **VP** (1 + **i**)^1

VF = 100 (1 + 0,1) **= 110**

Com o pagamento da **primeira prestação**[1] de R$ 40,21, o novo saldo devedor passa a ser 110,00 – 40,21= 69,79. Este é, pois, o saldo devedor levado para **t** = 2. (**VP** em **t** = 2 será R$ 69,79).

[1]*primeira prestação...*

Prestação = amortização + juros ou... Amortização = prestação – juros.

Desmembrando a primeira prestação...

Saldo devedor inicial...	100,00
Valor da prestação...	R$ 40,21
Juros = saldo devedor x taxa de juros...	R$ 100,00 x 0,1 = R$ 10,00
Amortização é a diferença...	R$ 40,21 – R$ 10,00 = R$ 30,21
Saldo devedor após pagamento...	R$ 100,00 – R$ 30,21 = R$ 69,79

Nesta prestação, R$ 30,21 correspondem à amortização da dívida e R$ 10,00 ao pagamento dos juros do período.

***–40,21...*

Entendendo o *saldo devedor em* **t** = 2 e o que faz parte da prestação...

Memória de cálculo

Saldo devedor inicial **t** = 1..... R$ 69,79

Saldo devedor em t = 2.... **VF** = **VP** (1 + **i**)^1

VF = 69,79 (1 + 0,1) = **76,77**

Com o pagamento da **segunda prestação**[1] de R$ 40,21, o novo saldo devedor passa a ser 76,77 – 40,21= 36,56. Este é, pois, o saldo devedor levado para **t** = 3. (**VP** em **t** = 3 será R$ 36,56).

[1]*segunda prestação...*
Prestação = amortização + juros ou... Amortização = prestação – juros.

Desmembrando a primeira prestação...

Saldo devedor inicial...	69,79
Valor da prestação...	R$ 40,21
Juros = saldo devedor x taxa de juros...	R$ 69,79 x 0,1 = R$ 6,98
Amortização é a diferença...	R$ 40,21 - R$ 6,98 = R$ 33,23
Saldo devedor após pagamento...	R$ 69,79 - R$ 33,23 = R$ 36,56

Nesta prestação, **R$ 33,23** correspondem à **amortização** da dívida e **R$ 6,98** ao pagamento dos **juros** do período.

****–40,21...*
Entendendo o *saldo devedor em t = 3* e o que faz parte da prestação...

Memória de cálculo
Saldo devedor inicial **t** = 2..... R$36,56
Saldo devedor em t = 3.... **VF** = VP $(1 + i)^1$
VF = 36,56 (1 + 0,1) **= 40,21**

Com o pagamento da **terceira prestação**[1] de R$ 40,21, após o pagamento da prestação, o novo saldo devedor é 40,21 – 40,21 = 0,00... *Dívida quitada...*

[1]*terceira prestação...*
Prestação = amortização + juros ou... Amortização = prestação – juros.

Desmembrando a primeira prestação...

Saldo devedor inicial...	36,56
Valor da prestação...	R$ 40,21
Juros = saldo devedor x taxa de juros...	R$ 36,56 x 0,1 = R$ 3,65
Amortização é a diferença...	R$ 40,21 – R$ 3,65 = R$ 36,56
Saldo devedor após pagamento...	R$ 36,56 – R$ 36,56 = R$ 0,00

Nesta prestação, **R$ 36,56** correspondem à **amortização** da dívida e **R$ 3,65** ao pagamento dos **juros** do período.

Neste caso, a primeira coisa que devemos fazer é **calcular o valor da prestação** na HP...

Resolução na HP-12C...

- Teclando 100 e o botão **PV** – valor presente.
- Teclando 10 e o botão **i** – taxa de juros de 10%.
- Teclando 3 e o botão **n** – prazo do empréstimo.
- Teclando 0* e o botão **FV** – valor futuro.
- Teclando, então, **PMT** vemos, no visor, o valor –40,21**.

**0...*
Se o saldo devedor final deve ser igual a zero, já que ele tem de pagar o empréstimo em 3 anos, seu valor futuro – **FV** – deve ser zero.

***–40,21...*
Calculamos, assim, o valor das prestações do sistema PRICE.

O sinal negativo significa que, se você recebeu R$ 100,00, deverá pagar 3 prestações – **PMT** – de R$ 40,21. O sinal (+) indica, pois, recebimento, enquanto o sinal (–) indica pagamento.

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação dessa operação.

Caso você não queira utilizar a HP, veja abaixo como se daria o cálculo das prestações.

Fórmula para cálculo de prestação

As fórmulas utilizadas para o cálculo das prestações de um financiamento são complexas. Para facilitar seu uso, devemos empregar a calculadora financeira. Apenas a título de ilustração, vamos ver, aqui, fórmulas que relacionam...

Valor Presente com Valor Futuro...

$$\mathbf{VF} = \mathbf{VP}\ (1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}$$

Onde...

- **i** é a taxa de juros composta;
- **n** é o período de duração do financiamento ou empréstimo.

*Valor Presente com Pagamentos Uniformes***...*

$$\mathbf{VP} = \mathbf{PMT}\ \{[(1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}} - 1] / \mathbf{i}\ (1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}\}$$

Valor Futuro com Pagamentos Uniformes...

$$\mathbf{VF} = \mathbf{PMT}\ \{[(1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}} - 1 / \mathbf{i}\}$$

**** Pagamentos Uniformes...*
Nas linguagem das calculadoras financeiras, os fluxos de caixa, quando idênticos – constantes –, são chamados de **PMT** –, do inglês, abreviação de *PayMenTs*.

Resolução no excel...

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação no excel.

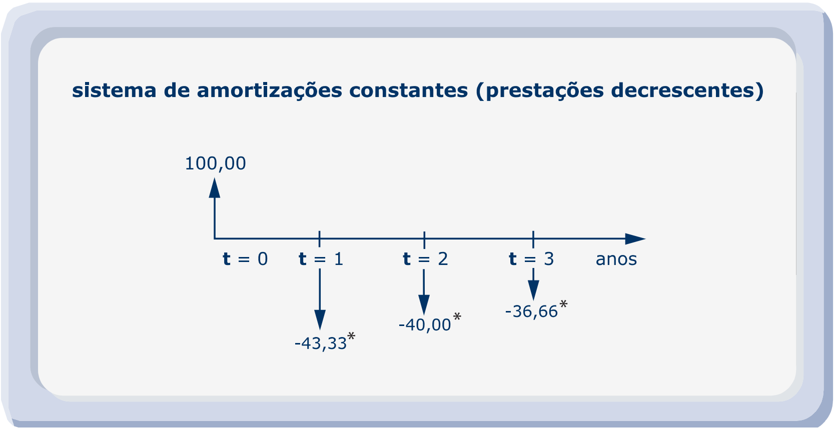
Resultados consolidados...

Tempo	t=0	t=1	t=2	t=3
Juros		10,00	6,98	3,65
Amortização		30,21	33,23	36,56
Prestação		40,21	40,21	40,21
Saldo devedor	100,00	69,79	36,56	0,00

As diferenças de R$ 0,01 resultam de arredondamentos.

3.3.4 Sistema SAC

O Banco Federal emprestou R$ 100,00 a um cliente, por três anos, cobrando uma taxa de juros de 10% ao ano. Esse empréstimo poderá ser liquidado de diferentes maneiras, por meio do pagamento de prestações. Vejamos como seria pago pelo seguinte sistema de amortização...



**–43,33...*

Calculando a primeira prestação...

Prestação = Amortização + Juros

A amortização constante = 33,33   E os juros...

Juros em t = 1 ... (principal remanescente x taxa)

Juros em t = 1.... 100,00 x 0,1 = 10,00

Prestação 1 = 33,33 + 10,00 = $\underbrace{43{,}33}_{\text{amortização}}$

Principal remanescente[1] = 100,00 – 33,33 = 66,66

[1]Principal remanescente...

Repare que o que vale é a diferença...

PRINCIPAL REMANSCENTE – **AMORTIZAÇÃO**.

Se você for reler a definição do sistema SAC, verá que...

(...) o cálculo dos juros do período se dá pela aplicação da taxa do contrato sobre o valor do saldo – remanescente do principal – no início do período;

(...) Em cada período, o principal remanescente decresce do valor de uma amortização.

***–40,00...*

Calculando a segunda prestação...

Prestação = Amortização + Juros

A amortização é constante = 33,33   E os juros...

Juros em t = 2 ... (principal remanescente x taxa)

Juros em t = 2.... 66,66 x 0,1 = 6,66

Prestação 2 = 33,33 + 6,66 = $\underbrace{40{,}00}_{\text{amortização}}$

Principal remanescente = 66,66 – 33,33 = 33,33

****–36,66...*
Calculando a terceira prestação...
Prestação = Amortização + Juros

A amortização é constante = 33,33   E os juros...
Juros em t = 3 ... (principal remanescente x taxa)
Juros em t = 3.... 33,33 x 0,1 = 3,33

Prestação 3 = 33,33 + 3,33 = $\underbrace{36,66}_{\text{amortização}}$

Principal remanescente = 33,33 – 33,33 = 0,00

Neste caso, a primeira coisa a fazer é calcular a **amortização**!

O valor da amortização se dá por meio da divisão do principal pelo número de prestações.
Amortização = Principal / número de prestações
Amortização = 100,00 / 3 = 33,33.

Resultados consolidados...

Tempo	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
Juros		10,00	6,66	3,33
Amortização		33,33	33,33	33,33
Prestação		43,33	40,00	36,66
Principal remanescente	100,00	66,66	33,33	0,00

3.3.5 Sistema SAM

O Banco Federal emprestou R$ 100,00 a um cliente, por três anos, cobrando uma taxa de juros de 10% ao ano. Esse empréstimo poderá ser liquidado de diferentes maneiras, por meio do pagamento de prestações. Vejamos como seria pago pelo seguinte sistema de amortização...

Neste caso, vamos pegar emprestados os resultados consolidados
dos dois casos anteriores...

sistema de amortização misto (PRICE + SAC) / 2

Sistema PRICE - resultados consolidados...

Tempo	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
Juros		10,00	6,98	3,65
Amortização		30,21	33,23	36,56
Prestação		40,21	40,21	40,21
Principal remanescente	100,00	69,79	36,56	0,00

Sistema SAC - resultados consolidados...

Tempo	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
Juros		10,00	6,66	3,33
Amortização		33,33	33,33	33,33
Prestação		43,33	40,00	36,66
Principal remanescente	100,00	66,66	33,33	0,00

Sistema SAM

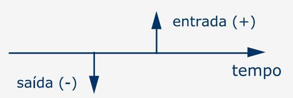
	t = 1	*t = 2*	*t = 3*
	40,21	*40,21*	*40,21*
+	*43,33*	*40,00*	*36,66*
	83,54	*80,21*	*76,87*
÷2	*41,77*	*40,10*	*38,43*

3.4 Exemplo 1

Uma fábrica de tachinhas vende 1.000 tachinhas por mês, de um único modelo, por R$ 0,90 cada unidade. Seus custos variáveis são de R$ 0,40 por unidade e os custos fixos mensais são de R$ 300,00. A alíquota do único imposto que incide sobre o lucro da operação é de 20%. Assumindo que as vendas não mudem ao longo do tempo, qual é o fluxo de caixa dessa fábrica a cada mês?

Um fluxo de caixa é formado por entradas e saídas...

Vamos começar calculando o dinheiro que entra!



Faturamento : 1000 x 0,90 = R$ 900,00
(entrada)

Custos operacionais: 1000 x 0,40 = R$ 400,00 — custos variáveis
(saída)

R$ 300,00 — custos fixos

R$ 700,00 — custo total

Resultado bruto: R$ 900,00 – R$ 700,00 = R$ 200,00

Aplicando a alíquota do único imposto (20%)... R$ 200,00 x 20% = R$ 40,00 – IRPF

Fluxo de caixa – resultado operacional líquido......... R$ 160,00

Vejamos, agora, os custos...

O fluxo de caixa líquido dessa fábrica para seus investidores é de R$ 160,00 por mês.

3.5 Exemplo 2

Você deve uma quantia a seu cunhado, que lhe ofereceu três alternativas para pagar essa dívida a uma taxa de juros de 10% ao ano: a) ao final de 1 ano, pagar R$ 2.200,00; b) ao final de 2 anos, pagar R$ 2.420,00 ou c) ao final de 3 anos pagar R$ 2.662,00.

Essas três alternativas são equivalentes?

Se quiser ver como calculamos a equivalência de fluxos de caixa, veja abaixo.

Cálculo do valor presente – fluxo de caixa

Calculamos o valor presente...

de um fluxo de caixa

...simplesmente trazendo para a data de hoje – valor presente – o valor desse mesmo fluxo.

Se o fluxo de caixa será efetivamente pago no futuro, esse será um valor futuro e, para calcularmos seu valor presente, devemos utilizar a fórmula...

$$\mathbf{VF} = \mathbf{VP}\,(1 + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}$$

Onde...

- **VF** é o valor do fluxo de caixa;
- **n** é o prazo a decorrer até o efetivo pagamento desse fluxo de caixa;
- **VP** é o valor presente desse fluxo de caixa a ser pago no futuro – **VF**.

de um conjunto de fluxos de caixa

...simplesmente trazendo para a data de hoje o valor de cada fluxo e depois somando todos os valores presentes...

$$\mathbf{VP}_{(total)} = \mathbf{VF}_{(1)} / (1+\mathbf{i})^{1} + \mathbf{VF}_{(2)} / (1+\mathbf{i})^{2} + \dots + \mathbf{VF}_{(n)} / (1+\mathbf{i})^{n}$$

Onde...

- $\mathbf{VF}_{(1)}$ é o valor do fluxo de caixa a ser pago em 1 período;
- $\mathbf{VF}_{(2)}$ é o valor do fluxo de caixa a ser pago em 2 períodos;
- $\mathbf{VF}_{(n)}$ é o valor do fluxo de caixa a ser pago em n períodos;

E...

- $\mathbf{VF}_{(1)} / (1+\mathbf{i})^{1}$ é o valor presente do fluxo de caixa a ser pago em 1 período;
- $\mathbf{VF}_{(2)} / (1+\mathbf{i})^{2}$ é o valor presente do fluxo de caixa a ser pago em 2 períodos;
- $\mathbf{VF}_{(n)} / (1+\mathbf{i})^{n}$ é o valor presente do fluxo de caixa a ser pago em **n** períodos;
- **VP** é o valor presente desse fluxo de caixa a ser pago no futuro – **VF**

de um ativo[1]

...calculando o valor presente do conjunto de fluxos de caixa a serem gerados por tal ativo, exatamente como vimos no item anterior.

$$\mathbf{VP}_{(ativo)}{}^{*} = \mathbf{VF}_{(1)} / (1+\mathbf{i})^{1} + \mathbf{VF}_{(2)} / (1+\mathbf{i})^{2} + \dots + \mathbf{VF}_{(n)} / (1+\mathbf{i})^{n}$$

Onde...

- $\mathbf{VF}_{(1)}$ é o valor do fluxo de caixa a ser pago em 1 período;
- $\mathbf{VF}_{(2)}$ é o valor do fluxo de caixa a ser pago em 2 períodos;
- $\mathbf{VF}_{(n)}$ é o valor do fluxo de caixa a ser pago em n períodos;

E...

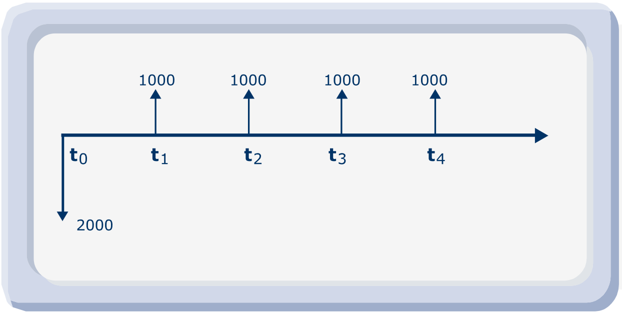
- $\mathbf{VF}_{(1)} / (1+\mathbf{i})^{1}$ é o valor presente do fluxo de caixa a ser pago em 1 período;
- $\mathbf{VF}_{(2)} / (1+\mathbf{i})^{2}$ é o valor presente do fluxo de caixa a ser pago em 2 períodos;
- $\mathbf{VF}_{(n)} / (1+\mathbf{i})^{n}$ é o valor presente do fluxo de caixa a ser pago em **n** períodos;
- **VP** é o valor presente desse fluxo de caixa a ser pago no futuro – **VF**

Já está na hora de voltarmos para o nosso exemplos, né?

[1]*Ativo...*

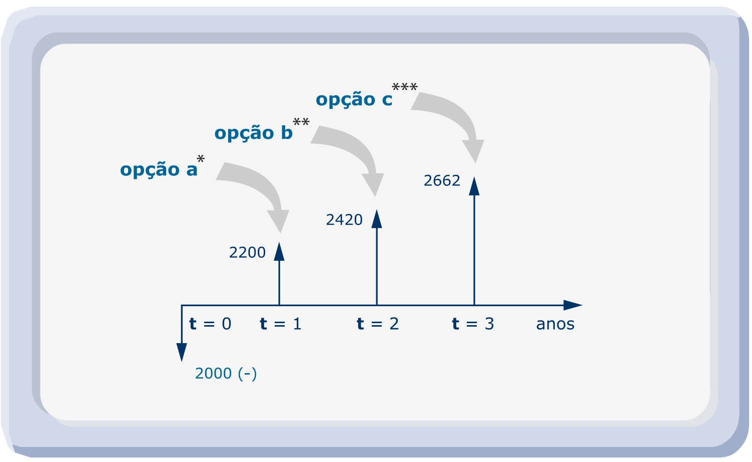
Nome genérico que se dá a qualquer bem, projeto, empresa, companhia, firma, ação de empresa, empreendimento, aplicação financeira, negócio ... que tenha um determinado custo – que pode inclusive ser zero – e que proporcione a seu proprietário – investidor – um resultado futuro em forma de fluxos de caixa.

Representamos qualquer ativo pela sequência de seus fluxos de caixa ao longo de sua vida econômica útil. Exemplo...



**VP*$_{(do\ ativo)}$...

Define-se o valor presente de um ativo como a soma do valor presente de todos os fluxos de caixa que esse ativo pagará a seus investidores – ou proprietários – ao longo de sua vida econômica útil.



**opção a...*

Você está liquidando o empréstimo do seu cunhado, com uma taxa de juros de 10% ao ano, quando paga uma prestação de R$ 2.200,00 em **t** = 1. O valor presente de R$ 2.200,00 em **t** = 0 é R$ 2.000,00.

Como chegamos a esse valor?

$\mathbf{VF} = \mathbf{VP}\,(1 + \mathbf{i})^n$

$2.200 = \mathbf{VP}\,(1 + 0{,}1)^1$

$\mathbf{VP} = 2.000$

***opção b...*

Você está quitando o empréstimo de seu cunhado, com uma taxa de juros de 10% ao ano, quando paga uma prestação de R$ 2.420,00 em **t** = 2. Calculando o valor presente de R$2.420,00 em **t** = 0, obtemos R$ 2.000,00.

Como chegamos a esse valor?

$\mathbf{VF} = \mathbf{VP}\,(1 + \mathbf{i})^n$

$2.420 = \mathbf{VP}\,(1 + 0{,}1)^2$

$\mathbf{VP} = 2.000$

****opção c...*

Você está quitando o empréstimo de seu cunhado, com uma taxa de juros de 10% ao ano, quando paga uma prestação de R$ 2.662,00 em **t** = 3. Calculando o valor presente de R$ 2.662,00 em **t** = 0, obtemos R$ 2.000,00.

Como chegamos a esse valor?

$\mathbf{VF} = \mathbf{VP}\,(1 + \mathbf{i})^n$

$2.662 = \mathbf{VP}\,(1 + 0{,}1)^3$

$\mathbf{VP} = 2.000$

Como vimos, as alternativas são equivalentes, pois têm o mesmo VP.

3.6 Lista de Exercícios

Acesse, no ambiente *on-line*, a lista de exercícios sobre o conteúdo desta unidade.

3.7 Síntese

Acesse, no ambiente *on-line*, a síntese desta unidade.

3.8 Autoavaliação

Acesse, no ambiente *on-line*, a autoavaliação deste módulo.

3.9 Jogo

Acesse, no ambiente *on-line*, um jogo sobre o conteúdo deste módulo.

MÓDULO 4 – INTRODUÇÃO À ANALISE DE PROJETOS

Apresentação

Neste módulo, analisaremos dois critérios muito importantes para decidir sobre que investimento fazer – o valor presente líquido e a taxa interna de retorno.

Inserimos, ao final do módulo, uma bateria de exercícios de fixação, para que você possa neles aplicar o conteúdo aqui tratado. Mais ainda... esses exercícios foram organizados por grau crescente de dificuldade.

Lembre-se... na base da tela de cada exercício, disponibilizamos *links*, para que você possa acessar tanto a *calculadora financeira* quanto gabarito e as explicações para esta questão.

Estrtura do Módulo 4

Começamos o curso com um módulo introdutório bem pequeno e vamos encerrar o curso com outro módulo que aqui é pequeno, mas, aí no mercado, pode gerar oportunidades de grandes retornos!

Pronto para começar?

UNIDADE 1 – VPL E TIR

1.1 Ilustração

Assista à ilustração no ambiente *on-line*.

1.2 VPL e TIR

Quando queremos escolher o melhor projeto para investir recursos, devemos nos pautar em critérios. Os critérios mais utilizados pelo mercado são...

- **VPL**;
- **TIR**.

Vamos, então, entender esses critérios...

1.2.1 VPL

VPL – Valor Presente Líquido[1]

Dá ao investidor a medida exata do lucro líquido / prejuízo de um investimento a valor presente, ou seja, **a valores de hoje**. Nesse sentido, é o lucro / prejuízo do investidor que investe **X** (ou custo do projeto) no projeto que vale **Y** (valor do projeto). Assim sendo, **o VPL é a diferença entre o valor e o custo de um ativo** (ou projeto). O **VPL** deve ser maior do que zero para que um projeto seja considerado viável.

Isso significa, basicamente, que o valor do projeto tem de ser maior do que o seu custo.

Ora...

- se um projeto custa mais do que vale, não devemos nele investir, pois a diferença será um prejuízo;
- se um projeto vale mais do que custa, devemos nele investir, pois a diferença será o nosso lucro.

[1]*VPL – Valor Presente Líquido...*
Nas máquinas financeiras, geralmente, o **VPL** está representado por sua sigla em inglês... **NPV** – *Net Present Value*.

Na calculadora HP-12C, o **VPL** é acessado pela sequência de botões **f NPV**, respectivamente, onde **f** é a tecla amarela, que informa à HP-12 C, que você quer calcular o *NPV*, que está em amarelo. Dessa forma, a HP-12C economiza teclas*.

** a HP-12C economiza teclas...*
A calculadora HP-12 C apresenta teclas com 3 funções diferentes.

Por exemplo, se você teclar diretamente a tecla **VP** ou **PV** (**PV** em inglês significa *Present Value*) sua calculadora vai calcular o valor presente.

Entretanto, se você teclar a tecla azul **g** e depois a mesma tecla (a branca **PV**), a função executada pela calculadora será **Cfo** – que significa *Cash Flow* do tempo zero -, ou seja, a função que está escrita em azul. E se você teclar a tecla amarela **f** e depois a mesma tecla (a branca **PV**), a função executada pela calculadora será **NPV**, ou seja, a função que está escrita em amarelo. Dessa forma, a calculadora economiza teclas, colocando três funções diferentes para uma mesma tecla, dependendo apenas de você indicar previamente à máquina – antes de teclar – qual é a função que deseja em dado instante.

1.2.2 TIR

TIR – Taxa interna de retorno*

Dá ao investidor a medida exata da taxa de retorno intrínseca de um projeto. Contudo, a **TIR** pode não ser um bom critério para aqueles que não dominam perfeitamente o assunto, podendo conduzir a conclusões erradas. Assim sendo, a **TIR** não deve ser utilizada por leigos. Podemos, então, definir a **TIR** como...

- a taxa interna de retorno de um projeto;
- a taxa máxima de custo de capital que um projeto suporta;
- a taxa de desconto para os fluxos de caixa de um projeto, que faz o **VPL** desse projeto ser zero.

É a taxa de retorno que um projeto fornece ao seu investidor.

Ora...

- se a **TIR** de um projeto é maior do que a taxa de custo do capital nele alocado, devemos investir nesse projeto, pois ele retorna uma taxa maior do que a taxa do custo do capital. A diferença para mais significa que teremos lucro;
- se a **TIR** for menor do que a taxa de custo do capital investido, não devemos investir neste projeto, pois estaremos pagando mais pelo capital do que conseguimos receber desse projeto.

** TIR – Taxa interna de retorno...*
Nas máquinas financeiras, geralmente, a **TIR** está representada por sua sigla em inglês... *IRR – Internal Rate of Return*.

Na calculadora HP-12C, assim como o **VPL**, a **TIR** é acessada pela sequência de botões *f IRR*, respectivamente, onde f é a tecla amarela, que informa à HP-12 C, que você quer calcular a *IRR*, que está em amarelo.

1.3 Taxa Mínima de Atratividade

Se voltássemos à problemática inicial...

Reveja a ilustração, apresentada no começo desta unidade, no ambiente *on-li*ne.

Um caminho interessante seria a análise do **VPL** e da **TIR** de cada situação, levando-se em consideração a **TMA**!

Precisamos, agora, conhecer as fórmulas!

TMA – Taxa Mínima de Atratividade

Como o próprio nome diz, **TMA** é a taxa mínima de retorno que um investimento – ou aplicação – deve proporcionar aos investidores para que eles se interessem em investir – ou aplicar – recursos. A **TMA** não torna exatamente explícito o motivo, mas TMA é baseada nas circunstâncias, vejamos exemplos...

- Um investidor tem a oportunidade de investir em um outro projeto similar para receber 12% ao ano.
  Esse investidor, ao analisar o projeto proposto, pode dizer que a **TMA** para ele investir no projeto é de 12% ao ano.
- Um investidor vai levantar dinheiro emprestado a uma taxa de juros de 12% ao ano.
  Esse investidor, ao analisar o projeto proposto, pode dizer que a **TMA** para ele investir no projeto é de 12% ao ano.
- Um investidor vai retirar os recursos que ele tem investido em um outro projeto similar, que está rendendo a uma taxa de 12% ao ano.
  Esse investidor, ao analisar o projeto proposto, pode dizer que a **TMA** para ele investir no projeto é de 12% ao ano.
- Se temos recursos aplicados no *Banco X*, a uma taxa de 10%, e recebemos uma proposta para investir no *Banco Y*, somente trocaremospara esse banco se formos receber uma taxa acima da **TMA**, ou seja, acima de 10%.

1.3.1 Valor Presente de um Projeto

Se o **VPL** – Valor Presente Líquido – de um projeto = **Valor – Custo**, precisamos descobrir a fórmula que calcula o Valor do projeto...

O valor de um projeto é calculado como sendo a **soma** do **valor presente** de todos os **fluxos de caixa** provenientes desse projeto...

$$\text{Valor} = \sum_{t=1}^{t=n} FC_t / (1 + i)^t$$

Onde:

- Σ é a letra maiúscula grega sigma, que significa somatório;
- $\sum_{t=1}^{t=n}$ significa somatório com t – *tempo* – variando de 1 até **n**;
- Valor $= \sum_{t=1}^{t=n} FC_t / (1 + i)^t$ significa...
  $FC_1 / (1 + i)^1 + FC_2 / (1 + i)^2 + \ldots + FC_n / (1 + i)^n$

Mesma fórmula utilizada no módulo 3 para calcular o valor presente de um conjunto de fluxos de caixa.

1.3.2 Fórmula do VPL

Se o **VPL** – Valor Presente Líquido – de um projeto = **Valor – Custo**...

... E já sabemos a fórmula do valor...

A fórmula do **VPL** é...

$$\mathbf{VPL = Valor - Custo}$$

$$\mathbf{Valor} = \sum_{t=1}^{t=n} \mathbf{FC_t / (1 + i)^t}$$

$$\mathbf{VPL} = \sum_{t=1}^{t=n} \mathbf{FC_t / (1 + i)^t \; - \; Custo}$$

Onde...

- o valor de um ativo é o valor presente dos diversos fluxos de caixa futuros do ativo;
- o custo de um ativo é o desembolso necessário para adquirir ou implantar o ativo;
- o custo é o fluxo de caixa do tempo zero – **FC** – considerando um modelo padrão em que o investimento é realizado no tempo zero.

Mas o melhor de tudo é o que vem a seguir...

1.4 Cálculo da TIR

As calculadoras financeiras têm uma sub-rotina que calcula o **VPL** diretamente a partir da inserção dos fluxos de caixa. Considerando que **TIR** é a taxa de desconto **i** que faz o **VPL** ser igual a zero...

Lembre-se de que...

...partindo da fórmula para obtermos a **TIR**, chegaremos a uma equação do enésimo grau, pois existirão termos como (1 + **TIR**)^n onde **n** é o número de fluxos de caixa. Como essa não é uma equação simples, convém calcularmos a **TIR** sempre com a calculadora, ao invés de tentarmos usar suas fórmulas.

1.5 Critérios para o Uso da TIR

A **TIR** é um importante critério para tomada de decisão. No entanto, alguns cuidados devem ser tomados, quando de sua utilização.

Pode existir mais de uma **TIR** positiva para um projeto quando houver mais do que uma inversão no sinal dos fluxos de caixa futuros projetados para um determinado projeto. Em casos como este, *não use a TIR*, a menos que você seja um expert no assunto.

Não use também a **TIR** para comparar dois projetos. O fato de o projeto *A* ter a **TIR** maior ou menor que a **TIR** do projeto *B* não significa que um seja melhor ou pior do que o outro.

Você pode, entretanto, usar a **TIR** para verificar se a taxa de retorno do projeto é maior do que a taxa do custo de capital do projeto. Se a **TIR** for maior que a taxa do custo de capital do projeto, você poderá investir, pois o **VPL** será positivo. Caso contrário, o investimento não é indicado, pois o **VPL** será negativo.

1.5.1 Exemplo 1

Antes de passarmos para os exemplos, que tal um desafio para ver se você entendeu mesmo os conceitos de **VPL** e **TIR**?

Apresentaram a você um projeto de investimentos com uma **TIR** de 10% ao ano. A taxa do custo de capital desse projeto é de 15% ao ano. Você investiria nesse projeto?

1.5.2 Exemplo 2

Apresentaram a você um projeto para criação de uma empresa de táxi aéreo, hoje, a um custo de R$ 2.000.000,00. O valor presente operacional desse projeto é R$ 2.800.000,00. Calcule o seu **VPL**, para decidir se nele vale a pena investir.

Esse problema é bem simples...

Se temos o **Valor** e também o **Custo**,basta aplicarmos a fórmula!

Aplicando a fórmula	**VPL** = Valor **–** Custo
Custo do projeto...	2.000.000, expresso no enunciado do problema
Calculando o VPL...	2.800.000 – 2.000.000 = 800.000

Como o VPL é positivo – R$ 800.000,00 –, você pode investir nesse projeto.

1.5.3 Exemplo 3

Investir em um projeto de criação de uma pequena escola de música custa hoje R$ 100.000,00. Esse projeto deve acabar em um ano. Ao final deste 1 ano, deve apresentar como resultado futuro R$ 121.000,00. A taxa de juros utilizada para descontar o valor presente do resultado – fluxo de caixa – desse projeto é de 10% ao ano. Qual é o seu **VPL**? Você investiria nele?

Podemos resolver esse problema de três formas....

pela fórmula...

No enunciado, temos o custo do projeto e o valor futuro – ao final de 1 ano.

- **VF** = 121.000;
- **n** = 1;
- **i** = 0,1*;
- **VP** =?;
- **VPL** =?;
- Custo = 100.000

> **0,1...*
> Quando usamos a fórmula, temos de colocar a taxa de juros em base decimal.
> Assim, 10% equivalem a 0,1.

Para calcularmos o **VPL**, precisamos, primeiro, do **VP**...

Aplicando a fórmula	**VF** = **VP** (1 + **i**)$^{\mathbf{n}}$
Substituindo os valores...	121.000 = **VP** x (1 + 0,1)$^{\mathbf{1}}$
Calculando...	121.000 = 1,1 **VP**
Obtemos...	**VP** = 121.000 / 1,1 = 110.000

Aplicando a fórmula	**VPL** = **Valor** – **Custo**
Substituindo os valores...	**VPL** = 110.000 – 100.000
Obtemos...	**VPL** = 10.000,00

pela HP-12C...

Do enunciado, temos...

- **CFj** = 121.000;
- **n** = 1;
- **i** =10;
- **VPL (NPV)** =?;
- **Custo (CF_0)**= 100.000

Teclando 100.000...	e os botões...	CHS (DATE) g PV (NPV / CF_0)	*...saída de Fluxo de Caixa – CF*[1]
Digitando 121.000...	e os botões...	g PMT (CFj)	*...entrada de Fluxo de Caixa – CF1*[2]
Digitando 10...	e o botão...	i (12÷)	
Podemos pedir o VPL	teclando, então, os botões....	f PV (NPV / CF_0)	*...Net Present Value*[3]

No visor da máquina aparece o resultado 10.000,00.

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação dessa operação.

[1]*Fluxo de Caixa* **–** *CF...*

A calculadora HP-12 C tem teclas com 3 cores: brancas, azuis e amarelas. Como queremos dizer que –100.000 é o custo no tempo t = 0, devemos indicar para a calculadora que esse é o fluxo de caixa no tempo zero. CF significa *Cash Flow* no tempo zero.

A tecla CF está representada na cor azul (na HP-12 C). Devemos colocar, pela ordem, primeiro o número (–100.000,00) seguido da tecla **g** para indicar que a próxima tecla é azul e, a seguir, devemos teclar CF para indicar à calculadora que este numero (–100.000,00) é o fluxo de caixa do tempo zero.

→ 100.000 CHS (muda o sinal)

Obs.: Nas outras calculadoras, a tecla normalmente também é CF, porém, pode não ser necessário utilizar as teclas com cores específicas.

[2]*Fluxo de Caixa* **–** *CF1...*

Após o fluxo de caixa do tempo zero – **CFo** –, os outros fluxos de caixa devem ser colocados na calculadora em sequência, sempre pela tecla **CFj**, que significa literalmente *Cash Flow* no tempo **j**. Em nosso exemplo, somente existe um único fluxo de caixa após o fluxo inicial. Por essa razão, colocamos na calculadora apenas o valor R$121.000,00 e nada mais.

Obs.: Quando você deseja repetir, sequencialmente, **n** vezes um determinado fluxo de caixa, você deve teclar esse valor **n** vezes ou, simplesmente, logo após colocar o valor na máquina, teclar n (o número de vezes que você deseja repetir esse valor), seguido da tecla **Nj**. Em outras palavras, essa tecla serve para poupar o trabalho de repetir **n** vezes um mesmo valor na calculadora.

[3]*Net Present Value...*

Conforme mostramos anteriormente, o **VPL**, na HP-12C, é representado pela tecla laranja **NPV** – *Net Present Value*.

Por isso, temos de teclar *f* (tecla laranja) para indicar que o que queremos é o *NPV* (que está em laranja).

pelo excel...

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação no excel.

Como o VPL é R$10.000, vale a pena investir nesse projeto.

1.5.4 Exemplo 4

Sabendo que a TIR é a taxa interna de retorno de um projeto, calcule a **TIR** de um projeto que custa R$ 1.000,00 – em **t** = 0 – e paga ao investidor R$ 1.300,00 em **t** = 1.

Vamos resolver esse problema utilizando a fórmula*!

Utilizando a fórmula...	$\mathbf{VPL} = \sum_{t=1}^{t=n} \mathbf{FC_t / (1 + TIR)^t - Custo}$
Aplicando a fórmula...	$0 = 1.300 / (1 + \mathbf{TIR})^{\mathbf{1}} - 1.000$
Substituindo os valores...	$1.300 / (1 + \mathbf{TIR}) = 1.000$
Calculando...	$1.300 = 1.000\ (1 + \mathbf{TIR})$
	$1.300 = 1.000 + 1.000\ \mathbf{TIR}$
	$1.300 - 1.000 = 1.000\ \mathbf{TIR}$
	$1.000\ \mathbf{TIR} = 300$
Obtemos...	$\mathbf{TIR} = 300 / 1.000 = 0{,}3 = 30\%$

Como só existe um fluxo de caixa, o somatório se reduz ao cálculo do valor presente, isto é, a uma equação simples e do primeiro grau – e, por isso, podemos resolvê-la sem a calculadora...

**fórmula...*

Considerando que TIR é a taxa de desconto i que faz o **VPL** ser igual a zero, utilizando a fórmula do **VPL**, temos que...

$$\mathbf{VPL} = \sum_{t=1}^{t=n} \mathbf{FC_t / (1 + i)^t - Custo}$$

Se **VPL** = 0

$$\mathbf{0} = \sum_{t=1}^{t=n} \mathbf{FC_t / (1 + i)^t - Custo}$$

Ou seja...

$$\sum_{t=1}^{t=n} \mathbf{= FC_t / (1 + i)^t - Custo}$$

De qualquer forma, é bem mais simples realizar os cálculos com a HP...

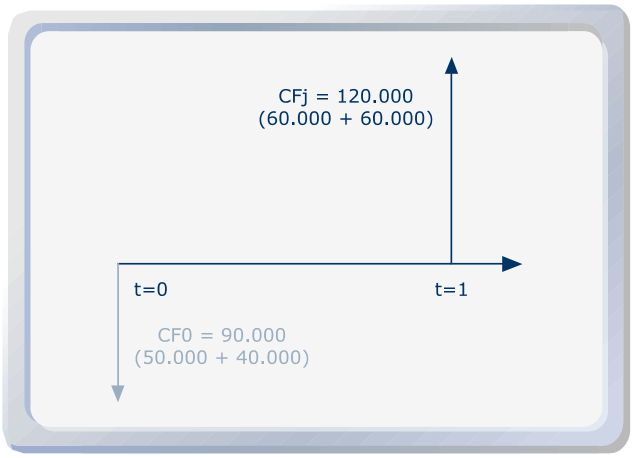
1.5.5 Exemplo 5

Você entrou em uma *franchise* de café expresso e, para tanto, teve de desembolsar:

- R$ 50.000,00 pelo contrato de franchise;
- R$ 40.000 no negócio – estoques e outros.

Ao final de 1 ano, após ter recebido um resultado líquido de R$ 60.000,00, você vendeu a *franchise* por R$60.000,00. Se, ao invés de fazer esse investimento, você tivesse aplicado seu dinheiro em uma outra *franchise* equivalente que rende 38% ao ano (essa seria a sua **TMA**). Você teria feito um bom negócio?

Vamos começar com o esquema do fluxo de caixa...



Utilizando a HP-12C...

Teclando 90.000... e os botões...

Digitando 120.000... e os botões...

Podemos pedir a **TIR** e os botões...

Obtemos... 33,33, isto é, 33,33%

Se sua TMA era de 38% - já que você teria esse rendimento se estivesse com esse dinheiro aplicado na outra *franchise* - e a TIR da *franchise* foi de 33,33%, o negócio não foi tão bom assim...

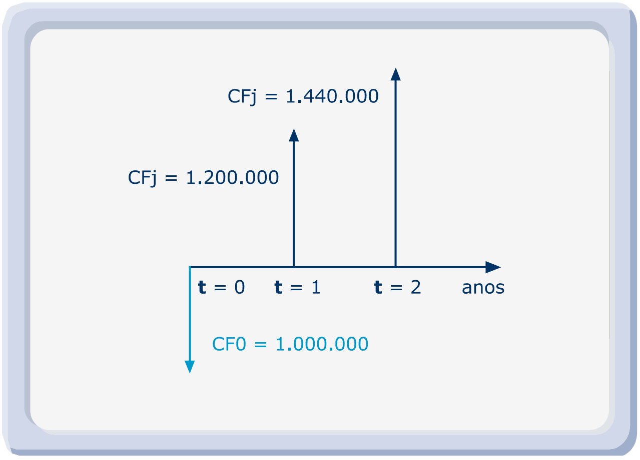
Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação na HP-12C e no excel.

Se sua **TMA** era de 38% – já que você teria esse rendimento se estivesse com esse dinheiro aplicado na outra *franchise* – e a **TIR** da *franchise* foi de 33,33%, o negócio não foi tão bom assim...

1.5.6 Exemplo 6

O projeto Zeus custa, hoje, R$ 1.000.000,00 e promete pagar a seus investidores um fluxo de caixa no valor de R$ 1.200.000,00, em **t** = 1 ano, e um outro e último fluxo de caixa, no valor de R$ 1.440.000,00, em t = 2 anos. A taxa de desconto adequada aos fluxos de caixa do projeto *Zeus* é de 20% ao ano. Qual é o **VPL** desse projeto?

Vamos começar com o esquema do fluxo de caixa...



Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação na HP-12C e no excel.

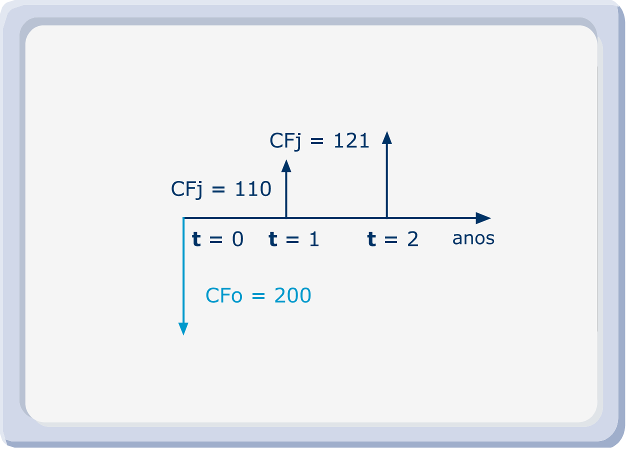
1.5.7 Exemplo 7

Um projeto de investimentos tem os seguintes fluxos de caixa projetados para o futuro...

- R$ 110,00 em **t** =1;
- R$ 121,00 em **t** =2.

O custo desse projeto é de R$ 200,00. Os investidores que irão nele aplicar pretendem receber uma taxa de retorno de 12% ao ano. Esse projeto é viável?

Para resolvermos este último exemplo, podemos calcular a **TIR** do projeto, para compará-la com a taxa que os investidores desejam....



Utilizando a HP-12C...

Teclando 200...	*e os botões...*	CHS g PV
Digitando 110...	*e os botões...*	g PMT
Digitando 121...	*e os botões...*	g PMT
Podemos pedir a **TIR**	*teclando, então, os botões....*	f FV — **TIR =** 10%

O projeto não compensa, pois a TIR é menor que a taxa de retorno esperada do projeto.

Acesse, no ambiente *on-line*, uma simulação na HP-12C e no excel.

1.5.8 Exemplo 8

Vejamos exemplos de cálculos da TIR em condições de perpetuidade...

As calculadoras financeiras não fazem cálculos de perpetuidade. Clique no botão abaixo para acessar os fundamentos e as fórmulas para fazer esses cálculos.

Solução

TIR é a taxa que faz zerar o **VPL**.
VPL = Valor Presente das Entradas – Valor Presente das Saídas
(**VPL**) **TIR** = **VP** (**TIR**) – I_0 = zero
Onde **VPL** (**TIR**) é **VPL** pela taxa **TIR**.
VP = Σ **FC's** /(1 + **TIR**)n, e onde $I_0 = CF_0$

Existem apenas três cenários possíveis...

Cenário com um fluxo de caixa, apenas
TIR é a taxa de desconto que faz o **VPL** ser igual a zero.
$VPL = FC_1 / (1 + TIR) - CF_0 = \text{zero}$
$CF_0 = FC_1 / (1 + TIR)$
$(1 + TIR) = FC_1 / CF_0$
$TIR = (FC_1 / CF_0) - 1$

Nesse cenário mais simples, pode-se optar por cálculos com ou sem a calculadora financeira.

Cenário com diversos fluxos de caixa, ou seja, *n* fluxos de caixa
TIR é a taxa de desconto que faz o **VPL** ser igual a zero.
$VPL\ (TIR) = VP\ (TIR) - I_0 = \text{zero}$
VPL = Σ **FC's** / (1 + **TIR**)

Nesse cenário incorremos em uma equação do grau n, onde n é um número de fluxos de caixa e a **TIR** será a única raiz positiva – se houver – dessa equação. Recomenda-se, nesse cenário, fazer os cálculos na calculadora financeira.

Cenário com diversos fluxos de caixa, ou seja, n fluxos de caixa
TIR é a taxa de desconto que faz o **VPL** ser igual a zero.
Em perpetuidade o valor presente **VP** é dado por $VP = FC_1 / (K - g)$
$VPL = VP - I_0 = FC_1 / (K - g) - I_0 = \text{zero}$
$0 = FC_1 / (TIR - g) - I_0$
$I_0 = FC_1 / (TIR - g)$
$(TIR - g) = FC_1 / I_0$
$TIR = FC_1 / I_0 + g$

Nesse cenário de perpetuidade não há como fazer o cálculo por meio da calculadora financeira. A fórmula é simples e de fácil aplicação. Nesse cenário, a utilização da fórmula para calcular a **TIR** é obrigatória.

1.5.9 Exemplo 9

Cálculo da TIR em cenário com um úncio fluxo de caixa

O projeto B2B custa R$ 1.000,00. Esse projeto deve durar apenas um ano. Ao final desse úncio ano, o projeto B2B deverá fornecer um resultado líquido final de R$ 1.200,00. Qual é a taxa de **TIR** desse projeto?

Solução

Partindo da definição que a taxa TIR é a taxa que faz o **VPL** = 0, temos...

VPL = **VP** – custos (I_0)

VPL = FC_t/ (1 + **K**)**t** – custos (I_0)

FC_t/ (1 + **TIR**)**t** – I_0 = 0

FC_t/ (1 + **TIR**)t = I_0

FC_t / (1 + **TIR**) = I_0

(1 + **TIR**) = FC_T/ I_0

(1 + **TIR**) = 1.200/ 1.000 = 1,2

TIR = 0,2 = 20%

Resposta: TIR = 20%

1.5.10 Exemplo 10

Cálculo da TIR de uma empresa perpétua <u>sem</u> crescimento nos fluxos de caixa.

A empresa DUDA promete pagar um fluxo de caixa anual de R$ 10.000,00, em regime de perpetuidade sem crescimento. O custo para criar, implantar, montar e construir esta empresa é, hoje, R$ 50.000,00. Calcule a **TIR** que esta empresa proporciona aos seus investidores.

Solução

Partindo da definição que a taxa **TIR** é a taxa que faz o **VPL** = 0, temos...

VPL = 0 = **VP** – I_0

Sendo uma empresa perpétua, seu valor presente – VP – é dado por VP = FC_1/ (**K** – **g**)

VPL = **VP** – I_0 = FC_1/ (**K** – **g**) – I_0

Para achar a **TIR**, devemos igualar o **VPL** a zero.

0 = FC_1/ (**TIR** – **g**) – I_0

I_0 = FC_1/ (**TIR** – **g**)

TIR = FC_1/ I_0 + **g**

Ao substituirmos os valores do enunciado na forma obtemos...

TIR = $\mathbf{FC_1 / I_0 + g}$

TIR = 10.000/ 50.000 = 0,20 = 20% ao ano.

Resposta: TIR = 20% ao ano.

1.5.11 Exemplo 11

Cálculo da TIR de uma empresa perpétua <u>com</u> crescimento nos fluxos de caixa.

A empresa TUPINAMBÁ promete pagar um fluxo de caixa de R$ 100.000,00, ao final do ano 1. Esse, fluxo de caixa tem uma taxa de crescimento estável de 2% ao ano. Dessa forma, ao final do ano 2, a empresa TUPINAMBÁ tem uma expectativa de pagar R$ 102.000,00 aos investidores e assim sucessivamente, em regime de perpetuidade. Assuma que a taxa de desconto adequada seja de 14% ao ano. Essa empresa custa, hoje, R$ 650.000,00. Determine a **TIR** desse projeto.

Solução

Partindo da definição que a taxa **TIR** é a taxa que faz o **VPL** = 0, temos...

VPL = 0 = $\mathbf{VP - I_0}$

Sendo uma empresa perpétua, seu valor presente – **VP** – é dado por

VP = $\mathbf{FC_1 / (K - g)}$

VPL = $\mathbf{VP - I_0 = FC_1 / (K - g) - I_0}$

Para achar a TIR, devemos igualar o **VPL** a zero.

$0 = \mathbf{FC_1 / (TIR - g) - I_0}$

$\mathbf{I_0 = FC_1 / (TIR - g)}$

TIR = $\mathbf{FC_1 / I_0 + g}$

Ao substituirmos os valores do enunciado na forma obtemos...

TIR = $\mathbf{FC_1 / I_0 + g}$

TIR = 100.000/ 650.000 + 0,02

TIR = 0,153846154 + 0,02 = 0,1738 = 17,38%

Resposta: TIR = 17,38% ao ano.

1.6 Conclusão

Como vimos, o **VPL** é fácil de calcular e seu resultado...

- *quando positivo, nos informa que a operação é lucrativa;*
- *quando negativo, nos informa que a operação vai resultar em um prejuízo.*

Isso ocorre porque o **VPL** positivo significa que dado projeto vale mais do que custa. Inversamente, quando o **VPL** é negativo, o projeto custa mais do que vale.

Já a **TIR** serve para determinar se um projeto será lucrativo ou não, dependendo de a **TIR** ser maior ou menor do que a taxa de custo de capital do projeto.

1.7 Lista de Exercícios

Acesse, no ambiente on-line, a lista de exercícios sobre o conteúdo desta unidade.

1.8 Síntese

Acesse, no ambiente *on-line*, a síntese desta unidade.

1.9 Autoavaliação

Acesse, no ambiente *on-line*, a autoavaliação deste módulo.

1.10 Jogo

Acesse, no ambiente *on-line*, um jogo sobre o conteúdo deste módulo.

MÓDULO 5 – ENCERRAMENTO

APRESENTAÇÃO

Na unidade 1 deste módulo, você encontrará alguns jogos didáticos para testar seus conhecimentos sobre o conteúdo desenvolvido em toda disciplina.

A estrutura desses jogos é bem conhecida por todos. Você poderá escolher o jogo de sua preferência ou jogar todos eles... a opção é sua!

Já na unidade 2, é hora de falarmos sério! Sabemos que o novo – e a disciplina que você terminou de cursar enquadra-se em uma modalidade de ensino muito nova para todos nós, brasileiros – tem de estar sujeito a críticas... a sugestões... a redefinições. Por estarmos cientes desse processo, contamos com cada um de vocês para nos ajudar a avaliar nosso trabalho.

Então? Preparado?